Álgebra 2 - Profesorado Matemáticas

Andrés Imlauer

September 6, 2024

Álgebra II

Terminología: si un observador está viendo un objeto, ents. la recta que va de sus ojos al objeto se llama línea de visión (ver figura 1) Si el objeto que es observado está arriba de la horizontal, ents. el ángulo entre la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de ángulo de elevación; si está debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se denomina ángulo de depresión. En muchos casos prácticos, los ángulos de elevación y de depresión se dan para un observador hipotético al nivel del suelo. Si la línea de visión sigue un objeto físico, por ejemplo un plano inclinado o una ladera, usamos el término ángulo de inclinación.

Ejercicios

1. Expresar los siguientes ángulos en el sistema circular:

ⓐ $30°12'14''$

ⓑ $57°32''$

ⓒ $110^{g}3^{m}55^{s}$

ⓓ $37^{g}7^{s}$

¿De donde viene el radián?

Es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud de su radio.

$$1\pi = 180^\circ$$

$$1\ rad = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44{,}81''$$

$$180^\circ - 1\pi$$

$$30^\circ 12' 14'' - x$$

$$x = \frac{30^\circ 12' 14''}{180^\circ}\pi \Rightarrow 0{,}167\pi$$

$$x = \frac{30^\circ 12' 14'' * \pi}{180^\circ} = 0^\circ 31' 37{,}77'' = 0{,}527$$

$$= 0^\circ 10' 4{,}08''\ \pi$$

$$1\ rad - \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$0{,}527157308\ rad - 30^\circ 12' 14''$$

Ej: $\alpha = 278^\circ \rightarrow rad$

$$180^\circ - \pi$$

$$278^\circ - x = \frac{\overset{139^\circ}{\cancel{278^\circ}} \cdot \pi}{\underset{90^\circ}{\cancel{180^\circ}}} = \frac{139}{90^\circ}\pi$$

¿De donde viene el radián?

Es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud de su radio.

$$1\pi = 180^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44{,}81''$$

$$180^\circ - 1\pi$$

$$30^\circ 12' 14'' - x$$

$$x = \frac{30^\circ 12' 14''}{180^\circ}\pi \Rightarrow 0{,}167\pi$$

$$x = \frac{30^\circ 12' 14'' * \pi}{180^\circ} = 0^\circ 31' 37{,}77'' = 0{,}527\pi$$

$$= 0^\circ 10' 4{,}08''\ \pi$$

$$1 \text{ rad} - \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$0{,}527157308 \text{ rad} - 30^\circ 12' 14''$$

Ej: $\alpha = 278^\circ \rightarrow$ rad

$$180^\circ - \pi$$

$$278^\circ - x = \frac{\overset{139^\circ}{\cancel{278^\circ}} \cdot \pi}{\underset{90^\circ}{\cancel{180^\circ}}} = \frac{139}{90^\circ}\pi$$

2

ⓐ $30°12'14''$

$180° - \pi$

$30°12'14'' - x = \frac{30°12'14''}{180°}\pi = 0{,}167\ \pi$

ⓑ $57°32''$

$180° - \pi$

$57°32'' - x = \frac{57°32''}{180°}\pi = 0{,}31671\pi$

$0{,}3167160494\pi$

$1° \rightarrow 60'$
$1' \rightarrow 60''$

Dividir grados

$(65°34'12'') \div 3$

$$\begin{array}{r} 21° \\ 3\,\overline{)\,65} \\ -6 \\ \hline 05 \\ -3 \\ \hline 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 120' \\ 34' \\ \hline 154' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51',333 \\ 3\,\overline{)\,154} \\ -15 \\ \hline 004 \\ -3 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 1 \end{array}$$

$1' \rightarrow 60''$
$+12''$
$72''$

$$\begin{array}{r} 24'' \\ 3\,\overline{)\,72} \\ -6 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 00 \end{array}$$

Respuesta:

$21°51'24''$

ⓒ $110^g3^m55^s$

$180° - \pi$

$110^g3^m5^s - x = \frac{110^g3^m5^s\pi}{180°}$

$= 0{,}6114\pi$

ⓓ $37^g 7^s$

$37^g 0^m 7^s$

$180^\circ - \pi$

$37^g 0^m 7^s - x = \frac{37^\circ 0' 7''}{180^\circ}\pi =$

$0{,}20556\pi$

② Expresar los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal:

ⓐ $\frac{12}{9}\pi$

$1\pi - 180^\circ$

$\frac{12}{9}\pi - x = \frac{\frac{12}{9}\cancel{\pi} * 180^\circ}{\cancel{\pi}} = 240^\circ$

ⓑ $4{,}5\pi$

$1\pi - 180^\circ$

$4{,}5\pi - x = \frac{4{,}5\cancel{\pi} * 180^\circ}{\cancel{\pi}} = 810\pi$

ⓒ $46^g 3^m = 46^\circ \; 3'' \; 0''$

ⓓ $410^g 65^s =$

$410^\circ 1' 5''$

$1{,}083$

$60 \overline{)65}$

-60

50

-0

500

-480

0200

-180

0200

ⓓ $37^g 7^s$

$37^g 0^m 7^s$

$180^\circ - \pi$

$37^g 0^m 7^s - x = \frac{37^\circ 0' 7''}{180^\circ}\pi =$

$0{,}20556\pi$

② Expresar los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal:

ⓐ $\frac{12}{9}\pi$

$1\pi - 180^\circ$

$\frac{12}{9}\pi - x = \frac{\frac{12}{9}\cancel{\pi} * 180^\circ}{\cancel{\pi}} = 240^\circ$

ⓑ $4{,}5\pi$

$1\pi - 180^\circ$

$4{,}5\pi - x = \frac{4{,}5\cancel{\pi} * 180^\circ}{\cancel{\pi}} = 810\pi$

ⓒ $46^g 3^m = 46^\circ \; 3'' \; 0''$

ⓓ $410^g 65^s =$

$410^\circ 1' 5''$

$1{,}08\hat{3}$

$60 \overline{)65}$

-60

50

-0

500

-480

0200

-180

0200

3. Expresar los siguientes ángulos en el sistema centesimal: 3

a) $\frac{5}{3}\pi$

π — 180°

$\frac{5}{3}\pi$ — 300°

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

Usaremos

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} \Rightarrow \frac{S}{9} = \frac{C}{10}$$

$$C = \frac{10}{9} S$$

Usaremos

$$\frac{R}{\pi} = \frac{C}{200} \Rightarrow R = \frac{C}{200}\pi$$

$$\Rightarrow C = \frac{R}{\pi}(200) \Rightarrow C = \frac{5/3\,\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}(200)$$

$$\Rightarrow C = \frac{5}{3}\,200 \Rightarrow$$

$$\boxed{C = 333,\overset{1}{3}}$$

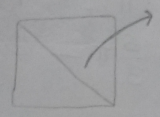
$333^\circ 20' 0''$

$$C = \frac{10}{9}(333) = 370^g$$

$$270^g = \frac{5}{3}\pi = 300^\circ$$

22

④ Se sabe que la diagonal del cuadrado mide 7 cm. ¿Cuál es la longitud del lado?



$$\text{lado} = \frac{\text{diagonal}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{lado} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

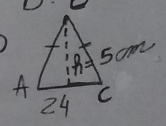
Pitágoras porq. son iguales

$$h^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 7^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{49}{2} = a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{7}{\sqrt{2}} = a}$$

⑤ Calcular el perímetro y el área del triángulo isósceles ABC en el que se sabe que $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = 24$ cm. y $h = 5$ cm. es la altura correspondiente al vértice B. B

$$\text{Área } \Delta = \frac{bh}{2} = \frac{24 \cdot 5}{2} = 60$$



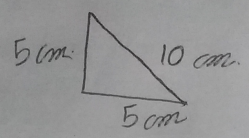
Perímetro de un $\Delta = a + b + c$

$= 24 + 2.5 = 34$

⑥ La hipotenusa de un Δ rectángulo mide 10 cm. y uno de los catetos mide el triple que el otro.

(a) ¿Cuánto miden los catetos? 4

(b) Calcular el área.



Pitágoras

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow h^2 = a^2 + 3a^2$$

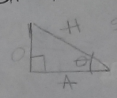
$$\Rightarrow 10^2 = a^2 + a3^2 \Rightarrow 10^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow \frac{10^2}{4} = a^2 \Rightarrow 25 = a^2 \Rightarrow$$

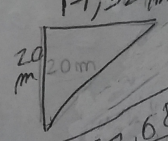
$$\Rightarrow \boxed{a = 5}$$

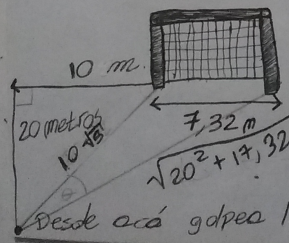
$$\text{Area } \Delta = \frac{bh}{2} = \frac{5.5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

7. Un campo de fútbol tiene una portería que mide 7,32 m. de ancho. Si la distancia de la portería a la esquina del campo (corner) es de 10 m. y desde esta esquina caminamos por la banda lateral del campo 20m, calcula el valor que tiene que tener el ángulo para que al golpear el balón, en línea recta, entre en el interior de la portería.



$\sin = \frac{O}{H}$





$$h^2 = 10^2 + 20^2$$

$$h = 500$$

$$\boxed{h = 10\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{O}{H}$$

$$\frac{7{,}32}{\ } = \text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{\theta = 57{,}689}$$

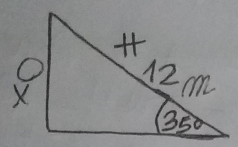
$$h = \sqrt{20^2 + 17{,}32}$$

$$h = 26{,}45718$$

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{10\sqrt{5}}{\ }\right)$$

$\text{tg}\,20 = \frac{O}{1\text{km}}$

$\sin = \frac{O}{H}$ $\cos = \frac{A}{H}$ $\tan = \frac{O}{A}$

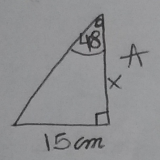


$\sin \theta = \frac{O}{H}$

$\sin 35^\circ = \frac{x}{12}$

$0,57 = \frac{x}{12}$

$\boxed{x = 12 \times 0,57 = 6,88 \text{ metros}}$

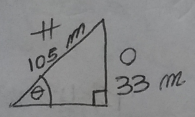


$\tan \theta = \frac{O}{A}$

$\tan 48^\circ = \frac{15}{x}$

$1,11 = \frac{15}{x}$

$x = \frac{15}{1,11} \Rightarrow \boxed{x = 13,50}$



$\sin \theta = \frac{O}{H}$

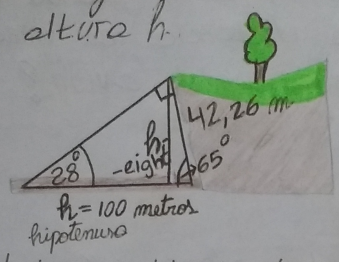
$\sin \theta = \frac{33}{105}$

$\sin \theta = 0,314$

$\boxed{\theta = 18,3^\circ}$

8. Un topógrafo está a 100 m. de la base de un acantilado volado, y mide un ángulo de elevación de 28° desde su lugar hasta la parte superior del acantillado. Vea la figura 2. Si el acantilado forma un ángulo de 65° con la horizontal, calcule su altura h.

$\boxed{\cos\theta = A/H}$



$\cos 65° = x/100$

$x = 100 * \cos 65°$

$\boxed{x = 42{,}26 \text{ metros}}$

La distancia del topógrafo a la base representa la hipotenusa del triángulo.

42,26 m. es la hipotenusa del ángulo pequeño y h representa el cateto opuesto del Δ.

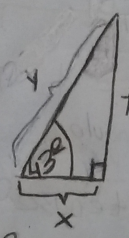
$\text{sen } 65° = h / (100 * \cos 65°)$

$h = (\text{sen } 65°)(42{,}26)$

$\boxed{h = 38{,}30 \text{ m}}$

La altura del acantilado es 38,30 m.

9. Se lanza un cohete desde el nivel del piso, con un ángulo de elevación de 43º. Si el cohete hace blanco en un avión autómata que vuela a 20.000 pies de altura, calcule la distancia horizontal entre el sitio de lanzamiento y el punto directamente abajo del avión cuando es tocado. ¿Cuál es la distancia en línea entre el lugar de lanzamiento y el avión?



height = 20.000 pies

$$\text{sen } 43^\circ = \frac{20.000}{Y}$$

$$\tan 43^\circ = \frac{20000}{X}$$

$$Y = \frac{20.000}{\text{sen } 43^\circ}$$

$$X = \frac{20.000}{\tan 43^\circ}$$

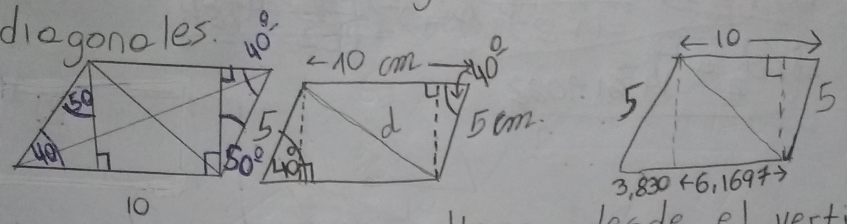
$$\boxed{X = 21447{,}37}$$

distancia horizontal

$$\boxed{Y = 29325{,}58}$$

distancia entre línea lugar de lanzamiento y el avión.

10. El ángulo entre dos lados de un paralelogramo es de 40°. Si los longitudes de los lados son de 5 y 10 cm., calcule las longitudes de las dos diagonales. 6



Si trazamos una altura desde el vertice se forma un Δ rectángulo de 40°, 90° y 50°

$\sin 40° = \frac{o}{H} \Rightarrow \sin 40° = \frac{o}{5}$

$\Rightarrow o = 5 * \sin 40° \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{o = 3{,}213938048}$

$\sin 50° = \frac{o}{H}$

$\Rightarrow \sin 50° = \frac{o}{5}$

$\Rightarrow o = 5 * \sin 50°$

$\Rightarrow \boxed{o = 3{,}830222216}$

ó Por pitágoras

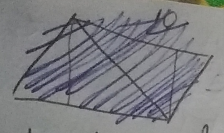
$5^2 = (\sin 40° * 5)^2 + a^2$

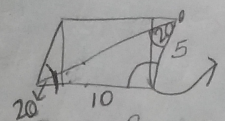
$25 = (\sin 40° * 5) + a^2$

$\boxed{a = 3{,}830222216}$

Como la base del trapecio es 10 y del triángulo es 3,830222216, su base del cuadrado formado por la diagonal y el cateto es 6,1697...

Diagonal: $d^2 = \underbrace{(3{,}802)}_{5 \cdot \sin 50°}{}^2 + \underbrace{(6{,}1697)}_{5 \cdot \sin 40}{}^2 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow \boxed{d = 5}$





$90^\circ + 50^\circ = 140^\circ$

$140^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ$

2da diagonal: $\sin 20^\circ = \frac{O}{H} \Rightarrow \sin 20^\circ = \frac{5}{H}$

$\Rightarrow H = \frac{5}{\sin 20^\circ} \Rightarrow \boxed{H = 14,61}$

$\Rightarrow \boxed{d_2 = 14,619022}$

11. Desde un punto en el suelo a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación a lo alto del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a lo alto de una astabandera que está en el edificio es de 27°. Encuentre la altura del edificio y la longitud de la astabandera.

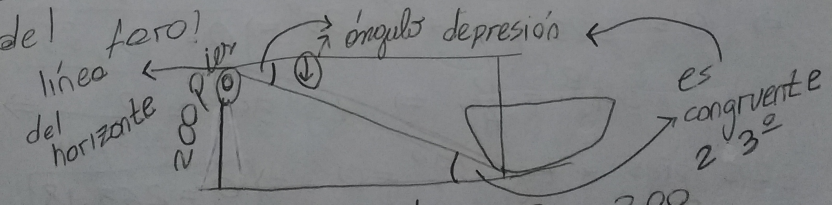
$\tan 24^\circ = \frac{O}{500 \text{ pies}} \Rightarrow \overbrace{500 \text{ pies} * \tan 24^\circ}^{\text{altura edificio}} = O$

$\tan 27^\circ = \frac{O}{500 \text{ pies}} \Rightarrow O = 500 \text{ pies} * \tan 27^\circ$

$(500 \text{ pies} * \tan 27^\circ) - (500 \text{ pies} * \text{tg } 24^\circ) =$ longitud de la astabandera

7

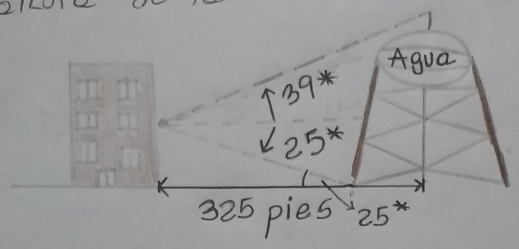
12. Desde lo alto de un faro de 200 pies, el ángulo de depresión a un barco en el océano es de 23°. ¿A qué distancia está el barco desde la base del faro?



$$tg\ 23° = \frac{O}{A} \Rightarrow tg\ 23° = \frac{200}{A}$$

$$\Rightarrow A = 200 / tg\ 23° = 471{,}17\ P.$$

13. Una torre de agua está situada a 325 pies de un edificio. Desde una ven-tana del edificio, un observador ve que el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es 39º y que el ángulo de depresión de la parte inferior de la torre es 25°. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿Cuál es la altura de la ventana?



Primero obtenemos altura de la ventana, luego a esa altura sumale la mitad de la altura de la torre

$$tg\ 25^{\circ} = \frac{O}{A} \Rightarrow tg\ 25^{\circ} = \frac{O}{325\ pies}$$

altura ventana

$$\Rightarrow O = 325\ pies * tg\ 25^{\circ} \Rightarrow \boxed{O = 151,55}$$

$$tg\ 39^{\circ} = \frac{O}{A} \Rightarrow tg\ 39^{\circ} = \frac{O}{325\ pies} \Rightarrow$$

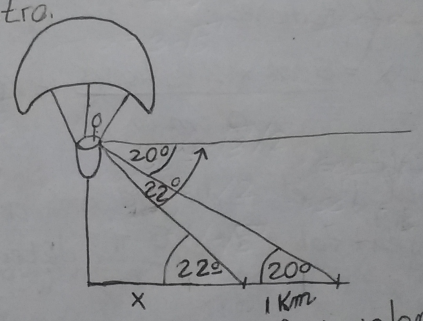
$$325\ pies * tg\ 39^{\circ} = O \Rightarrow \boxed{O = 263,18}$$

Altura de la torre: 151,55 más 263,18 = 414,73

(14) Un globo de aire caliente está flotando sobre una carretera recta. Para estimar la altura a la que se encuentran los tripulantes del globo, éstos simultáneamente miden el ángulo de depresión a dos señalamientos consecutivos de kilometraje situados en la carretera, en el mismo lado del globo. Se encuentran que los ángulos de depresión son 20° y 22°. ¿A qué altura está el globo?

8

La distancia entre dos postes consecutivos es de 1 kilómetro.



$$tg\ 22° = \frac{height}{X}$$

$$tg\ 20° = \frac{height}{X+1}$$

Despejamos X

$$X = \frac{height}{tg\ 22°}$$

$$X+1 = \frac{height}{tg\ 20°} \Rightarrow X = \frac{height}{tg\ 20°} - 1\,Km$$

Igualamos

$$\frac{height}{tg\ 22} = \frac{height}{tg\ 20°} - 1$$

$$2{,}48h = 2{,}75h - 1$$

$$2{,}48h - 2{,}75h = -1$$

$$-0{,}27h = -1$$

$$\boxed{h = 3{,}7\,Km}$$

$$\left(\frac{height}{tg\ 22°}\right) = \left(\frac{height}{tg\ 20°} - 1\right)$$

$$height = \left(\frac{height}{tg\ 20°} - 1\right) tg\ 22$$

$$tg\ 20 = \frac{O}{1\,Km}$$

12

(15) Un ángulo central determina un arco de 6 cm. en una circunferencia de 30 cm. de radio. Expresar el ángulo central θ en radianes y en grados.

Circunferencia $= 2\pi . r = 2\pi (30) = 60\pi$ cm.

60π cm ___ $360°$

6 cm ___ $X = 6\text{ cm} * 360° / (60\pi\text{ cm}) = 11{,}46'$

Radianes

$= 11°27'32{,}96''$

60 cm ___ 2 radianes

6 cm ___ $X = \dfrac{6\text{ cm} * 2\text{ radianes}}{60\text{ cm}} = 0{,}2$ radianes

¿Cuál es el radio de una circunferencia si un ángulo central de $\frac{5\pi}{36}$ determina un arco de 120 cm?

$\frac{2\pi}{C} = (5\pi/36) / 120\text{cm.} \Rightarrow C = 2\pi * \frac{120\text{ cm}}{5\pi/36} =$

$= 2 * 36 * \frac{120\text{ cm}}{5} = 1728$ cm.

$C = 2\pi r \Rightarrow r = C/2\pi = 1728\text{ cm}/2\pi = 275$ cm.

⑯ Una vía férrea ha de des- 9
-cribir un arco de circunferencia. ¿Qué radio hay que utilizar si la vía tiene que cambiar su dirección en 25º en un recorrido de 120 metros?

360° — $2\pi r$

25° — $x = \frac{25 \times 2\pi r}{360^{\circ}} = \frac{5}{36}\pi r$

$25 \times 2\pi \frac{rad}{360} = 0{,}436$ rad.

$\theta = \frac{L}{R}$; $R = \frac{L}{\theta} = \frac{120}{0{,}436 r}$

$= 275$ metros

Otra forma

Si a 25° corresponde a una longitud de 120 metros a 360° le corresponde X.

25° — 120 metros

360° — $x = \frac{360^{\circ} * 120\ m}{25^{\circ}} = 1728$ metros

La longitud de toda circunferencia vale: 1728 m.

$L = 2\pi r$; $1728 = 2\pi r$

$r = \frac{1728}{2\pi} = 275{,}019$ metros

(16) Una vía férrea ha de des- 9
-cribir un arco de circunferencia. ¿Qué radio hay que utilizar si la vía tiene que cambiar su dirección en 25º en un recorrido de 120 metros?

360° — $2\pi r$

25° — $x = \frac{25 \times 2\pi r}{360^{\circ}} = \frac{5}{36}\pi r$

$25 * 2\pi \frac{rad}{360} = 0{,}436$ rad.

$\theta = \frac{L}{R}$; $R = \frac{L}{\theta} = \frac{120}{0{,}436 r}$

$= 275$ metros

Otra forma

Si a 25° corresponde a una longitud de 120 metros a 360° le corresponde X.

25° — 120 metros

360° — $x = \frac{360^{\circ} * 120\ m}{25^{\circ}} = 1728$ metros

La longitud de toda circunferencia vale: 1738 m.

$L = 2\pi r$; $1728 = 2\pi r$

$r = \frac{1728}{2\pi} = 275{,}019$ metros

(17) Trace un Δ que tenga ángulo agu-
-do θ, y encuentre las otras cinco re-
-laciones trigonométricas de θ.

(a) $\sin\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = 36^\circ\, 52'\, 11{,}63''}$

Las relaciones trigonométricas son medidas especia-
-les de un Δ rectángulo. El lado opuesto al
ángulo recto se llama hipotenusa, los demás se
llaman catetos.

Relaciones trigonométricas básicas:
seno, coseno y tangente.

Otras relaciones:

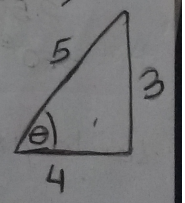
secante $= \frac{H}{A}$ $\qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$

cosecante $= \frac{H}{O}$ $\qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$

cotangente $= \frac{A}{O}$ $\qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$

$\cos\theta = \frac{A}{H} \Rightarrow \cos 36^\circ 52' 11{,}63'' = \frac{A}{5} \Rightarrow$

$A = 5 * \cos 36^\circ 52' 11{,}63'' \Rightarrow \boxed{A = 4}$



$\cos\theta = 4/5$

$tg\,\theta = \frac{3}{4}$

secante $\theta = \frac{5}{4}$ $\qquad$ cosecante $\theta = \frac{5}{3}$

cotangente $\theta = \frac{4}{3}$

10

ⓑ $\cot\theta = 1 \Rightarrow \cot\theta = \frac{A}{O}$

$\frac{1}{tg\,\theta} = 1 \Rightarrow 1 = tg\,\theta \Rightarrow tg^{-1}(1) = \theta$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$

$\csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$

$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$

$\text{sen } 45^\circ = \sqrt{2}/2$

$\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$

$tg\ 45^\circ = 1$

Mal Hecho en página 11

ⓒ $\sec\theta = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{7}{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{7/2} = \cos\theta \Rightarrow \frac{2}{7} = \cos\theta \Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = \theta$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 73^\circ 23' 54{,}42''}$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right)} =$

Mal

$= 1^\circ 2' 36{,}59'' = 1{,}043$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = 0^\circ 17' 53{,}31'' = 0{,}298$

$\text{sen } \theta = \text{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right) = 0^\circ 57' 29{,}93''$

$\cos\theta = \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right) = \frac{2}{7}$

$tg\,\theta = tg\left(\cos^{-1}\left(2/7\right)\right) = 3^\circ 21' 14{,}77'' = 3{,}354$

10

ⓑ $\cot\theta = 1 \Rightarrow \cot\theta = \frac{A}{O}$

$\frac{1}{tg\,\theta} = 1 \Rightarrow 1 = tg\,\theta \Rightarrow tg^{-1}(1) = \theta$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$

$\csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$

$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$

$\text{sen } 45^\circ = \sqrt{2}/2$

$\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$

$tg\ 45^\circ = 1$

Mal Hecho en página 11

ⓒ $\sec\theta = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{7}{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{7/2} = \cos\theta \Rightarrow \frac{2}{7} = \cos\theta \Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = \theta$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 73^\circ 23' 54{,}42''}$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right)} =$

Mal

$= 1^\circ 2' 36{,}59'' = 1{,}043$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = 0^\circ 17' 53{,}31'' = 0{,}298$

$\text{sen } \theta = \text{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right) = 0^\circ 57' 29{,}93''$

$\cos\theta = \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right) = \frac{2}{7}$

$tg\ \theta = tg\left(\cos^{-1}\left(2/7\right)\right) = 3^\circ 21' 14{,}77'' = 3{,}354$

10

ⓑ $\cot\theta = 1 \Rightarrow \cot\theta = \frac{A}{O}$

$\frac{1}{tg\,\theta} = 1 \Rightarrow 1 = tg\,\theta \Rightarrow tg^{-1}(1) = \theta$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$

$\csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$

$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$

$\operatorname{sen} 45^\circ = \sqrt{2}/2$

$\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$

$tg\ 45^\circ = 1$

Mal / Hecho en página 11

ⓒ $\sec\theta = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{7}{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{7/2} = \cos\theta \Rightarrow \frac{2}{7} = \cos\theta \Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = \theta$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 73^\circ 23' 54{,}42''}$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right)} =$

$= 1^\circ 2' 36{,}59'' = 1{,}043$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = 0^\circ 17' 53{,}31'' = 0{,}298$

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right) = 0^\circ 57' 29{,}93''$

$\cos\theta = \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)\right) = \frac{2}{7}$

$tg\,\theta = tg\left(\cos^{-1}\left(2/7\right)\right) = 3^\circ 21' 14{,}77'' = 3{,}354$

Mal

ⓓ $\cos\theta = \frac{9}{40} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{9}{40}\right)$ 12

$\Rightarrow \boxed{\theta = 76^\circ 59' 49,64''}$

$\sin\theta = \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{9}{40}\right)\right) = 0,974$

$\tan\theta = tg\left(\cos^{-1}\left(\frac{9}{40}\right)\right) = 4,3304$

$\sec\theta = \sec(\cos^{-1}(9/40)) = 1/\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{9}{40}\right)\right) = \frac{40}{9}$

$\csc\theta = 1/\sin(\cos^{-1}(9/40)) = 1,026316012$

$\cot\theta = 1/\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{9}{40}\right)\right) = 0,2309$

ⓔ $\tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\theta = 60^\circ}$

$\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$

$\cos 60^\circ = 1/2$

$\sec 60^\circ = 1/\cos 60^\circ = 2$

$\csc 60^\circ = 1/\sin 60^\circ = (2\sqrt{3})/3$

$\cot 60^\circ = 1/\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ⓕ $\csc\theta = \frac{13}{12} \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{13}{12} \Rightarrow$

$\frac{1}{13/12} = \sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \boxed{67^\circ 22' 48,49''}$

$\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 12/13$

$\cos\theta = \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 5/13$

$\tan\theta = \tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = 12/5$

$\sec\theta = 1/\cos(\sin^{-1}(12/13)) = 13/5$

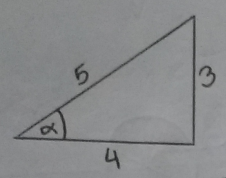
$\cot\theta = 1/\tan(\sin^{-1}(12/13)) =$ 11 12

$= \frac{5}{12}$ Mal

17.

ⓐ $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$

- $\cos\alpha = 4/5$
- $\sec\alpha = \frac{5}{4}$
- $\tan\alpha = 3/4$
- $\cot\alpha = 4/3$
- $\csc\alpha = 5/3$



✓

ⓒ $\sec\alpha = \frac{7}{2}$

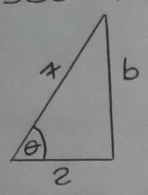
$2^2 + b^2 = 7^2$

$b^2 = 7^2 - 2^2$

$b = \sqrt{45}$

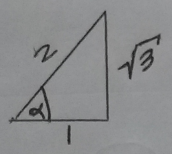
$b = 3\sqrt{5}$

- $\operatorname{sen}\alpha = (3\sqrt{5})/7$
- $\cos\alpha = 2/7$
- $\tan\alpha = 3\sqrt{5}/2$
- $\cot\alpha = 2/3\sqrt{5}$
- $\csc\alpha = 7/3\sqrt{5}$



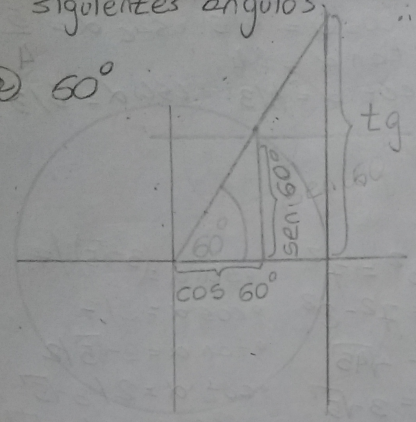
ⓔ $\tan\alpha = \sqrt{3}$

- $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{3}/2$
- $\sec\alpha = 2$
- $\cos\alpha = 1/2$
- $\csc\alpha = 2/\sqrt{3}$
- $\cot\alpha = 1/\sqrt{3}$

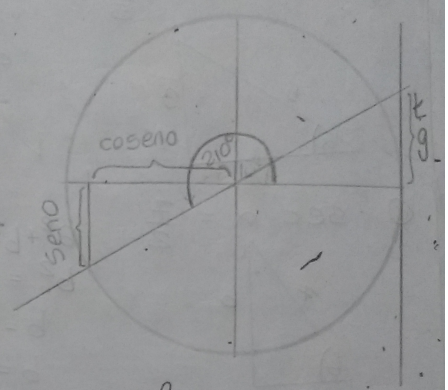


(18) En un círculo trigonométrico, señalar los segmentos trigonométricos de cada uno de los siguientes ángulos.

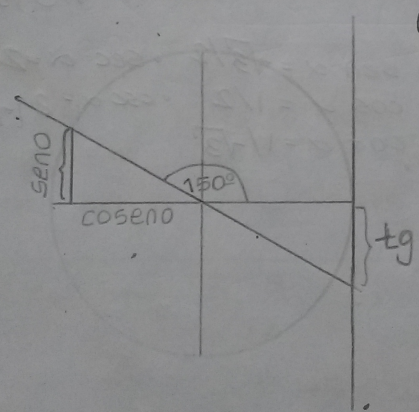
ⓐ 60°



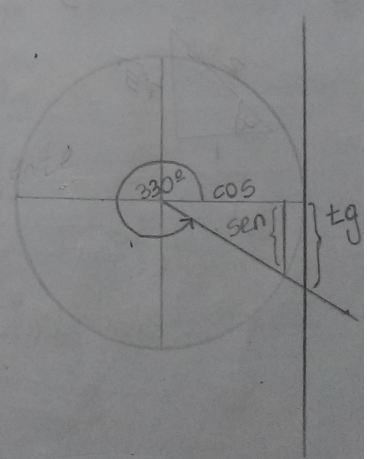
ⓒ 210°



ⓑ



ⓓ 330°



(19) Evalúe la expresión sin usar la calculadora. 12

(e) $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}$

$\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 60° = \frac{1}{2}$

$\cos(90° - \theta) = \sin \theta$, $\sin \cdot (90 - \theta) = \cos \theta$

$\cos(90° - 30°) = \sin 30°$

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ $\cot = \frac{\cos}{\sin}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 30° = 1/2$

$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2}$ $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Por que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

contestado en el libro de trigonometría página 38.

$\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\sin 60 = \cos(90° - 60)$

$\sin 60 = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \sin(90 - 60°) = \sin 30° = 1/2$

(19) Evalúe la expresión sin usar la calculadora. 12

(e) $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}$

$\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$, $\sin(90-\theta) = \cos\theta$

$\cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$ $\cot = \frac{\cos}{\sin}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 30^\circ = 1/2$

$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2}$ $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Por que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

contestado en el libro de trigonometría página 38.

$\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\sin 60 = \cos(90^\circ - 60)$

$\sin 60 = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \sin(90 - 60^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$

ⓑ $\sin 30^\circ * \csc 30^\circ = \cancel{\sin 30^\circ} * \frac{1}{\cancel{\sin 30^\circ}}$
$= 1$

ⓒ $\sin 30^\circ * \cos 60^\circ + \sin 60^\circ * \cos 30^\circ =$
$\sin 30^\circ * \sin 30^\circ + \cos 30^\circ * \cos 30^\circ =$
$(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 = 1.$
$(\sqrt{3}/2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$

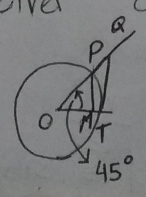
ⓓ $(\sin 60^\circ)^2 + (\cos 60^\circ)^2 = 1$

ⓔ $(\cos 30^\circ)^2 - (\sin 30^\circ)^2 =$

$\cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 = 1 \Rightarrow \sin \alpha^2 = 1 - \cos^2 \alpha$
$\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha =$
$2\cos^2 \alpha - 1 = 2 . \cos^2 30^\circ - 1 = 2 . \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1$
$= \frac{1}{2}$

ⓕ $\left(\sin \frac{\pi}{3} * \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} * \cos \frac{\pi}{3}\right)$
$(\sin 60^\circ * \cos 45^\circ - \sin 45^\circ * \cos 60^\circ)$

Como resolver $\cos 45^\circ$, sen 45° (en página 39)



Al ser $P\hat{O}M = 45^\circ$
el Δ POM es isósceles
es decir $\overline{PM} = \overline{OM} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ sen $45^\circ = \cos 45^\circ$

De acuerdo con teo. pitágoras y 13
teniendo en cuenta que $\overline{PM} = r$, es:
med $\overline{PM} = 1$; luego:

$$\overline{OM}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OP}^2 \Rightarrow 2 \text{ med } \overline{PM}^2 = 1$$

o sea: med $\overline{PM}^2 = \frac{1}{2}$

y: med $\overline{PM} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

o sea:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f) $\left(\sin \frac{\pi}{3} * \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} * \cos \frac{\pi}{3}\right)$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{1}{2}\Big)$$

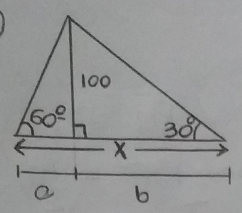
$$\frac{\sqrt{3.2}}{2.2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$= (10-60) = \sin 30^\circ = 1/2$

(20) Encuentre "x" redondeada a un lugar decimal.

(a)



$tg\ 60° = \frac{100}{a}$

$a = \frac{100}{tg\ 60°}$

$\boxed{a = 57,74}$

$tg\ 90° = \frac{100}{b}$

$b = \frac{100}{tg\ 90°}$

$\boxed{b = 173,2}$

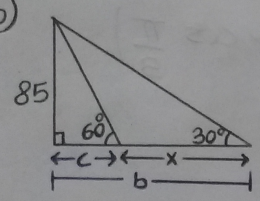
$x = a + b$

$x = 57,74 + 173,2$

$\boxed{x = 230,94}$

$\underline{x = 230,9}$

(b)



$tg\ 30° = \frac{85}{b}$

$b = \frac{85}{tg\ 30°}$

$\boxed{b = 85\sqrt{3}}$

$tg\ 60° = \frac{85}{c}$

$c = \frac{85}{tg\ 60°}$

$c = \frac{85\sqrt{3}}{3}$

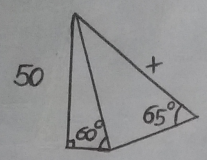
$b = x + c$

$85\sqrt{3} = x + \frac{85\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{x = 98,1}$

14

ⓒ



$\text{sen } 60^\circ = \frac{50}{b}$

$b = \frac{50}{\text{sen } 60^\circ}$

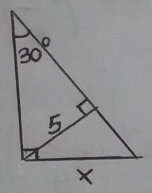
$\boxed{b = 57,7}$

$\sin(65^\circ) = b/x$

$x = \frac{57,7}{\sin(65^\circ)}$

$\boxed{x = 63,6}$

ⓓ



$\text{sen } 30^\circ = 5/b$

$b = \frac{5}{\text{sen } 30^\circ}$

$\boxed{b = 10}$

$tg(30^\circ) = \frac{x}{b}$

$x = b \cdot tg(30^\circ)$

$x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{x = 5,8}$

21) Calcular:

ⓐ $\cos 1230^\circ * \tan(-1500^\circ) = \frac{3}{2}$

ⓑ $\sin 760^\circ * \csc 750^\circ = \sin 760^\circ * \frac{1}{\sin 750^\circ}$

$= 1,28$

ⓒ $\sin 1440^\circ / \cos -777^\circ = 0$

ⓓ $(\tan -315°)^2 = 1$

(22) Encontrar los valores de:

ⓐ $\sin\theta$ y $\cos\theta$, dada la $\tan\theta = -\frac{3}{4}$

ⓑ $\sin\theta$, sabiendo que $\cos\theta = -4/5$ y $\tan\theta > 0$

a. $\tan\theta = \frac{O}{A} = \frac{-3}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$

$\theta = -36°52'11{,}63''$

$\sin\theta = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin\theta\left(\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = -\frac{3}{5}$

$\cos\left(\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = \frac{4}{5}$

$\sin\theta = \frac{O}{H} \Rightarrow \sin\theta = \frac{-3}{H} \Rightarrow H = \frac{-3}{\sin\theta} = \boxed{5}$

$\cos\theta = \frac{A}{H} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{H} \Rightarrow H = \frac{4}{\cos\theta}$

$\frac{3}{\sin\theta} = \frac{4}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{-3}{\sin\theta} = \frac{4}{\sin(90-\theta)}$

$-3\cos\theta = 4\sin\theta \Rightarrow \theta = 4\sin\theta + 3\cos\theta$

(b) $\sin\theta$, sabiendo que $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ 15
y $\tan\theta > 0$

$$\cos\theta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = 143{,}1301024$$

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

(23) Demostrar que cuando θ es un ángulo del 2do cuadrante, tal que $\tan\theta = -\frac{2}{3}$ entonces

(a) $$\frac{\sin(90^\circ - \theta) - \cos(180^\circ - \theta)}{\tan(270^\circ + \theta) + \cot(360^\circ - \theta)} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

dns adblocking

(b) $\sin\theta$, sabiendo que $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ 15
y $\tan\theta > 0$

$$\cos\theta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = 143{,}1301024$$

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

(23) Demostrar que cuando θ es un ángulo del 2do cuadrante, tal que $\tan\theta = -\frac{2}{3}$ entonces

(a) $$\frac{\sin(90^\circ - \theta) - \cos(180^\circ - \theta)}{\tan(270^\circ + \theta) + \cot(360^\circ - \theta)} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

dns adblocking

(24) Demostrar las siguientes identidades trigonométricas: 16

ⓐ $(1+\tan^2\beta) * \cos^2\beta = 1$

$$\tan^2\beta - \frac{1}{\cos^2\beta} = -1$$

$$= \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} - \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{\sin^2\beta - \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\beta}}{\cos^2\beta}$$

$$= \sin^2\beta - \cos^2\beta =$$

$$= -(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = -1$$

$$2\cos^2\beta - 1 = \tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$2\cos^2\beta * \cos^2 A - \cos^2 A = \sin^2 A$$

$$2\cos^2\beta \cdot \cos^2 A = 1$$

$$\cos^2 A \times \cos^2\beta = 1$$

$$\cos A * \cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ⓐ $(1+\tan^2\beta) * \cos^2\beta = 1$

$$\cos^2\theta\,(1+\tan^2\theta) = \cos^2\theta + \cos^2\theta \cdot \tan^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \cancel{\cos^2\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

El lado izq. es igual al derecho $= 1$ ✓

(24) Demostrar las siguientes identidades trigonométricas: 16

ⓐ $(1+\tan^2\beta) * \cos^2\beta = 1$

$\tan^2\beta - \frac{1}{\cos^2\beta} = -1$

$= \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} - \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{\sin^2\beta - \cos^2\beta}{\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\beta}}$

$= \sin^2\beta - \cos^2\beta =$

$= -(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = -1$

$2\cos^2\beta - 1 = \tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$2\cos^2\beta * \cos^2 A - \cos^2 A = \sin^2 A$

$2\cos^2\beta \cdot \cos^2 A = 1$

$\cos^2 A * \cos^2\beta = 1$

$\cos A * \cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

ⓐ $(1+\tan^2\beta) * \cos^2\beta = 1$

$\cos^2\theta\,(1+\tan^2\theta) = \cos^2\theta + \cos^2\theta \cdot \tan^2\theta$

$= \cos^2\theta + \cancel{\cos^2\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

El lado izq. es igual al derecho $= 1$ ✓

(b) $\cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1$

$-\sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1 - \cos^2\phi$

$-\sin^2\phi = \cos^2\phi - 1$

$-\cos^2\phi - \sin^2\phi = -1 \Rightarrow -\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1} = -1$

(c) $\sin\phi + \cos\phi = \dfrac{\cos\phi}{1-\tan\phi} + \dfrac{\sin\phi}{1-\cot\phi}$

$1 - \dfrac{1}{\tan\phi}$

$\dfrac{\phi}{\tan\phi}$

$\sin\phi + \cos\phi = \dfrac{\cos\phi + \sin\phi}{(1-\tan\phi)(1-\cot\phi)}$

Mal

$\sin\phi + \cos\phi = \dfrac{\cos\phi + \sin\phi}{\cancel{(1-\tan\phi)}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{1-\tan\phi}}$

$\sin\phi + \cos\phi = \cos\phi + \sin\phi$

$\sin\phi + \cos\phi = \sin\phi + \cos\phi$ ✓

(d) $\cancel{1} - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - \cancel{1}$

$+2 - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$

$-2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$

$-2(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} - 1)$

$-2(1-1) = 0$ ✓

(b) $\cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1$

$-\sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1 - \cos^2\phi$

$-\sin^2\phi = \cos^2\phi - 1$

$-\cos^2\phi - \sin^2\phi = -1 \Rightarrow -\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1} = -1$

(c) $\sin\phi + \cos\phi = \dfrac{\cos\phi}{1-\tan\phi} + \dfrac{\sin\phi}{1-\cot\phi}$

$1 - \dfrac{1}{\tan\phi}$

$\dfrac{\phi}{\tan\phi}$

$\sin\phi + \cos\phi = \dfrac{\cos\phi + \sin\phi}{(1-\tan\phi)(1-\cot\phi)}$

Mal

$\sin\phi + \cos\phi = \dfrac{\cos\phi + \sin\phi}{\cancel{(1-\tan\phi)}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{1-\tan\phi}}$

$\sin\phi + \cos\phi = \cos\phi + \sin\phi$

$\sin\phi + \cos\phi = \sin\phi + \cos\phi$ ✓

(d) $\cancel{1} - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - \cancel{1}$

$+2 - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$

$-2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$

$-2(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} - 1)$

$-2(1-1) = 0$ ✓

17

(c) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-tg\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}$

Partimos del lado derecho para llegar al izquierdo

$$\frac{\cos\theta}{1-tg\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}$$

$$tg\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta} \Rightarrow \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{(\cos\theta+\sin\theta)\cancel{(\cos\theta-\sin\theta)}}{\cancel{\cos\theta-\sin\theta}} = \cos\theta+\sin\theta$$

$= (10-60) = \sin 30 = 1/2$

17

(c) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-tg\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}$

Partimos del lado derecho para llegar al izquierdo

$$\frac{\cos\theta}{1-tg\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}$$

$tg\,\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\frac{\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta} \Rightarrow \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{(\cos\theta+\sin\theta)\cancel{(\cos\theta-\sin\theta)}}{\cancel{\cos\theta-\sin\theta}} = \cos\theta+\sin\theta$$

$= \sin(10-60) = \sin 30 = 1/2$

ⓔ $(1-\cos^2\phi)(1+\cot^2\phi)=1$

$$1+\cot^2\theta-\cos^2\theta-\cos^2\theta\cdot\cot^2\theta$$

$$1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\cos^2\theta-\cos^2\theta\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$1+-\cos^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta\cdot\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\sin^2\theta+\frac{\cos^2\theta\,\overbrace{\boxed{\cancel{1-\cos^2\theta}}}^{=\cancel{\sin^2\theta}}}{\cancel{\sin^2\theta}}$$

$$\boxed{\sin^2\theta=1-\cos^2\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

ⓕ $\dfrac{\sec x\cdot\csc x}{\tan x+\cot x}=1 \Rightarrow \sec x\cdot\csc x=\tan x+\cot x$

Partimos del lado derecho para llegar al izq.

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan x&=\frac{\sin x}{\cos x}\\ \cot x&=\frac{\cos x}{\sin x}\end{aligned}}$$

$$\frac{\sin x\cdot\sin x}{\sin x\cos x}+\frac{\cos x\cdot\cos x}{\sin x\cdot\cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}=$$

$$=\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\csc x\cdot\sec x=$$

$$=\boxed{\sec x\cdot\csc x}$$

(g) $(\sec^2\beta)^{-1} + (\csc^2\beta)^{-1} = 1$ 18

$$\frac{1}{\sec^2\beta} + \frac{1}{\csc^2\beta} = 1$$

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}} = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \checkmark$$

(h) $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\csc\alpha$$

$$\frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)} = 1$$

$$\frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$\frac{2+2\cos\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)} = \frac{2\cancel{(1+\cos\theta)}}{\sin\theta\,\cancel{(1+\cos\theta)}} = \frac{2}{\sin\theta} =$$

$2\csc\theta$

$\sin(10-60) = \sin 30 = 1/2$

(i) $\tan^2\alpha \cdot \csc^2\alpha \cdot \cot^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = 1$

$$\cancel{\tan^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin^2\alpha}} \cdot \frac{1}{\cancel{\tan^2\alpha}} \cdot \cancel{\sin^2\alpha} = 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

(j) $$\frac{\sin x + \tan x}{\cot x + \csc x} = \sin x \cdot \tan x$$

$$\frac{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x}}$$

$$\frac{\frac{\sin x \cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x + 1}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin x(\cos x + 1)}{\cos x}}{\frac{\cos x + 1}{\sin x}}$$

$$\left(\frac{\sin x\,\cancel{(\cos x + 1)}}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\sin x}{\cancel{\cos x + 1}}\right)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$$

$= \sin x \quad \cos x$

(25) Resolver las siguientes ec. para $x \in [0, 2\pi[$: 19

(a) $\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$-\dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$

$-tg\,x = 1$

$tg\,x = -1$

$x = tg^{-1}(-1)$

$\boxed{x = -45^{\circ}}$ → Resultado en el 4to cuadrante

ó

$\sin x = -\cos x$

$\sin x = -\sin(90-x)$

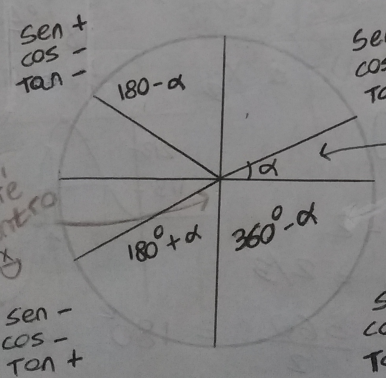
$x = -\sin^{-1}[\sin(90-x)]$

$x = -90 - x$

$2x = -90$

$\boxed{x = -45^{\circ}}$

α	0°	30°	45°	60°	90°
Sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
Tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—



$\alpha = 45^{\circ}$ (1er cuadrante)

135° (segundo cuadrante)

$-45^{\circ} = 315^{\circ}$

225° (3er cuadrante)

$C_S = \{45, 135, 225, 315\}$

erie el centro y

$\sin(10-60) = \sin 30 = 1/2$

$C = 30$

RESOLVER

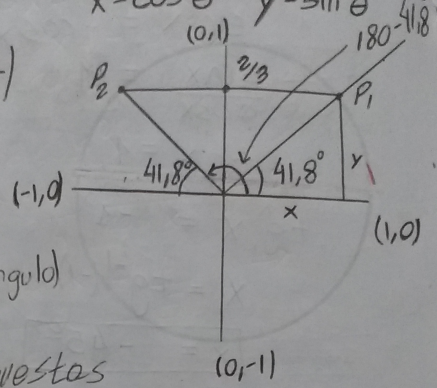
Período = 180°

$3 \sin 2x = 2$ $\qquad 0° \leq x \leq 360°$

$\sin(2x) = 2/3$ $\qquad x = \cos\theta \quad y = \sin\theta$

$(\hat{2x}) = \sin\left(\frac{2}{3}\right)$

$(\hat{2x}) = 41,8°$



$2x = 180 - 41,8 = 138,2$

$2\hat{x} = 41,8$ (principal ángulo)

$\boxed{x_1 = 20,9}$

$2x = 180° - 41,8°$

$2x = 138,2$

$\boxed{x_2 = 69,1}$

Respuestas entre $0 \leq x \leq 180$

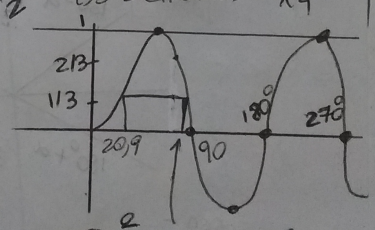
Si agregamos 180° a x_1: obtenemos x_3:

$\boxed{x_3 = 200,9}$

y si sumamos 180° a x_2: obtenemos x_4:

$\boxed{x_4 = 249,1}$

Respuestas entre $180° \leq x \leq 360°$



$3 \sin(2x) = 2$

$\sin(2x) = 2/3$

$\text{Periodo} = \frac{360}{2} = 180°$

$90 - 20,9 = 69,1$

(b) $3\sin^2 x + \cos^2 x = 2$ 20

$3\sin^2 x = 2 - \cos^2 x$

$\sin^2 x = \dfrac{1+1+1+1-\cos^2 x}{3}$

$\sin^2 x = \dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{3}$

$\boxed{\begin{array}{l}\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \\ \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x\end{array}}$

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$3\sin^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$

$3\sin^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1$

$2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1/2 \Rightarrow$

$\sin x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \Rightarrow \sin x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \sin^{-1}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x_1 = 45^\circ$

$x_2 = -45^\circ$

$\underline{x = \alpha}$

$\alpha = 45^\circ$ (1er cuadrante) $\quad 0 \leq x \leq 360^\circ$

$180 - 45 = 135^\circ$ (2do cuadrante)

$180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ (3er cuadrante)

$360 - 45 = 315$ (4to cuadrante)

$C.S. = \{45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ\}$

$C.S. = \{\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$

$\sin(10-60) = \sin 30^\circ = 1/2$

Sin 4 . . .

(c) $\sin x + 2.\cos x = 1$

$\sin x = (1 - 2\cos x)$

$\sin^2 x = (1 - 2\cos x)^2$

$\sin^2 x = 1 - 2\cos x - 2\cos x + 4\cos^2 x$

$\sin^2 x - 1 = -2\cos x - 2\cos x + 4\cos^2 x$

$-(-\sin^2 x + 1) = -4\cos x + 4\cos^2 x$

$-\cos^2 x = -4\cos x + 4\cos^2 x$

$-5\cos^2 x = -4\cos x \Rightarrow \frac{5}{4}\frac{\cos^2 x}{\cos x} = 1$

$\Rightarrow \frac{5}{4}\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$x = \cos^{-1}\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{x = 36{,}86^\circ}$

d) $\sin^2 x + \tan^2 x = 0$

21

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x \sin^2(x)}{\cos^2 x} = 0$$

$$\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x(\cos^2 x + 1) = 0$$

Resolvemos cada parte por separado

$\Rightarrow \sin^2 x = 0$ o $\cos^2 x + 1 = 0$

$\Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow x = 2\pi n,\ x = \pi + 2\pi n$

$\cos^2 x + 1 = 0$ (Sin solución)

$\frac{3}{3}$

(m)

(e) $2\sin x + -\sqrt{3}\tan x = 0$

$$\frac{\sin x \cdot -\sqrt{3} + 2\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$

$\sin(x) -\sqrt{3} + 2\cos(x)\sin(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(x)(-\sqrt{3} + 2\cos x) = 0$

Resolvemos cada parte por separado

$\sin x = 0$ ó $-\sqrt{3} + 2\cos(x) = 0$

$\sin(x) = 0 : x = 2\pi n, x = \pi + 2\pi n$

$-\sqrt{3} + 2\cos(x) = 0 : x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$

22

(1). $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

$\sin^4 x - \cos^4 x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2\sin^4 x - 2\cos^4 x - 1}{2} = 0$

$\Rightarrow 2\sin^4 x - 2\cos^4 x - 1 = 0$

$\Rightarrow -1 - 2\cos^4(x) + 2\sin^2(x)\sin^2(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 4\cos^2(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$

$\cos(x) = \frac{1}{2} : x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; x = \frac{5}{3}\pi + 2\pi n$

$\cos(x) = -\frac{1}{2} : x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$

9) $\sin 2x + \cos x = 0$

$\cos(x) + 2\cos(x)\sin(x) = 0$

$\cos(x)\left(2\sin(x)+1\right) = 0$

Resolvemos por separado

$\cos(x) = 0$ ó $2\sin(x) + 1 = 0$

$\cos(x) = 0 : x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

$2\sin(x) + 1 = 0 : x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,$

$x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$

R) $\tan x - \sin 2x = 0$ 23

$$\frac{\sin x - \cos x \sin(2x)}{\cos x} = 0 \Rightarrow \sin x - \cos x \cdot \sin(2x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) - 2\cos^2(x)\sin(x) = 0$$

$$\Rightarrow -\sin x\left(-\sqrt{2}\cos(x)+1\right)\left(-\sqrt{2}\cos(x)-1\right) = 0$$

Resolvemos por separado

$\sin(x) = 0$: $x = 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$

$-\sqrt{2}\cos(x) + 1 = 0$: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$

$-\sqrt{2}\cos(x) - 1 = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$

1. $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan x - 1 = 0$

$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} + \tan(x) - 1 = 0$$

$$\frac{-2\sin x + \tan x . \cos x + \tan x \sin x}{\cos x + \sin x} = 0$$

$$-2\sin(x) + \tan(x)\cos(x) + \tan(x)\sin(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2(x) - \cos(x)\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2(x) - \cos(x)\sin(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(x)(\sin(x) - \cos(x)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \quad \text{ó} \quad \sin(x) - \cos(x) = 0$$

$\sin x = 0 : x = 2\pi n, \; x = \pi + 2\pi n$

$\sin(x) - \cos(x) = 0 : x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Hallamos el valor del ángulo

j) $\sin(x+30^\circ)+\cos(x+60^\circ)=1+\cos 2x$

$\cos x = 1+\cos 2x \Rightarrow$

$\cos x - 1 - \cos 2x = 0 \Rightarrow$

$\cos x - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = +2\cos^2 x$

$\Rightarrow 1 = \frac{2\cos^2 x}{\cos x}$

$\cos(x) = 0, \ \cos(x) = \frac{1}{2}$

$\cos(x)=0: \ x = 90^\circ + 360^\circ n, \ x = 270^\circ + 360^\circ n$

$\cos(x) = \frac{1}{2}: \ x = 60^\circ + 360^\circ n, \ x = 300^\circ + 360^\circ n$

(26) Un edificio está al lado de una colina que baja formando un ángulo de 15º. El sol está sobre la colina, y desde el edificio tiene un ángulo de elevación de 42º. Calcular la altura del edificio, si su sombra mide 36 pies de longitud.

25

Se trata de un problema trigonométrico q. contiene a 3 Δ, por tanto:

según la figura que se adjunta se represen-
-ta la situación en 3 Δ: el SPQ, SPR
y el SRQ, en donde los primeros son rec-
-tángulos y el 3ero oblicuángulo.
En donde para el triángulo SPQ el lado SQ
equivale a la distancia hasta la parte superior
del edificio desde el pie de la colina -lo que
se observa con un ángulo de elevación al sol de
42º-, el lado PQ representa la distancia
desde el suelo hasta el extremo superior del
edificio y el lado PS es el plano donde se
asienta la base de la colina.

Donde este triángulo rectángulo contiene
a dos Δ: El SPR y el SRQ siendo
el primero rectángulo y segundo obtusángu-
-lo.

Hallamos el valor del ángulo

Donde el triángulo rectángulo SPR representa a la colina - donde se ubica el edificio - la cual tiene un ángulo de inclinación de 15° y donde conocemos la dimen-sión del lado SR la cual es la longi-tud de la sombra proyectada por el edi-ficio de 36 pies.

Dado que lo que se pide hallar es la altura h (QR) del edificio y no otra cosa prescindimos de los Δ rectángulos y trabajaremos en el Δ rectángulos y tra-bajaremos en el Δ oblicuángulos SRQ para la resolución del ejercicio

Donde para este Δ SRQ conocemos el va-lor del lado SR que es la longitud de la sombra proyectada por el edificio - donde esa distancia es la misma que la hipotenusa del Δ rectángulo SPR que representa a la colina - con un valor de 36 pies y se tiene el lado SQ que es la distancia desde el pie de la colina en S hasta la cima del edi-ficio. Y finalmente el lado QR que es la altura del edificio y nuestra incognita.

Luego para resolver este pro- 26
-blema trabajaremos en el Δ oblicu-
ángulo SRQ.

Donde para resolver triángulos no rec-
-tángulos como este emplearemos el teore-
-ma del seno - tmb. llamado ley de ~~senos~~
senos

Teo. del seno:

Dado un Δ ABC cualq. con lados a, b y c y
con ángulos interiores α, β y γ, siendo
estos respectivamente opuestos a los lados
Entonces se cumple la relación:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)}$$

Determinamos los valores de los ángulos
para el Δ obtusoángulo SRQ
Hallamos el valor del ángulo interno
en S denotado como α
Restando del ángulo de elevación al sol
de 42° el ángulo de inclinación de la coli-
-na: Teniendo $\alpha = 42° - 15°$

$$\alpha = 27°$$

$c = 20°$ y $\pi = 55°$

Hallamos el valor del ángulo interno en Q denotado como γ.

El valor de este ángulo resulta ser el mismo que para el Δ rectángulo SPQ.

Consideramos luego un ángulo recto de $90°$ y el ángulo de elevación al sol de $42°$

Por la sumatoria de los angulos interio-res de un Δ:

Planteamos:

$$180° = 90° + 42° + \gamma$$

$$\gamma = 180° - 90° - 42°$$

$$\boxed{\gamma = 48°}$$

No siendo necesario para la resolución del ejercicio hallar el valor del 3er ángulo.

Calculamos la altura h del edificio ($\overline{QR}$) empleando el teorema del seno.

$\overline{QR} = h$ = Altura del edificio

$\overline{SR}$ = sombra del edificio = 36 pies

$$\frac{\overline{QR}\ h}{sen(\alpha)} = \frac{\overline{SR}}{sen(\gamma)}$$

$$\frac{\overline{QR}\ h}{sen(27°)} = \frac{\overline{SR}}{sen(48°)}$$

$$\frac{\overline{QR}\ h}{\text{sen}(27°)} = \frac{36 \text{ pies}}{\text{sen}(48°)}$$

27

$$\overline{QR}\ h = \frac{36 \text{ pies} \times \text{sen}(27°)}{\text{sen}(48°)}$$

$$\overline{QR}\ h = 21{,}99 \text{ pies}$$

$$\overline{QR}\ h \approx 22 \text{ pies}$$

La altura h - (QR) del edificio es de aproximadamente 22 pies

Primero se obtuvo ángulo α, γ luego con el teorema de altura del seno

27 Dos puntos A y B, están en las orillas opuestas de un río. Otro punto, C, está en la misma orilla del río que B, a una distancia de 230 pies en él. Si el ángulo ABC es de 105° y el ángulo ACB es de 20°, calcule la distancia de A a B a través del río.

¿Cuál es la distancia de A a B a través del río?

La suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180°.

$$180° = A + B + C$$

Siendo. $B = 105°$ $\Rightarrow A = 55°$

$C = 20°$

$$\frac{\overline{QR}\ h}{\text{sen}(27°)} = \frac{36 \text{ pies}}{\text{sen}(48°)}$$

27

$$\overline{QR}\ h = \frac{36 \text{ pies} \times \text{sen}(27°)}{\text{sen}(48°)}$$

$$\overline{QR}\ h = 21{,}99 \text{ pies}$$

$$\overline{QR}\ h \approx 22 \text{ pies}$$

La altura h - (QR) del edificio es de aproximadamente 22 pies

Primero se obtuvo ángulo α, γ luego con el teorema la altura del seno

(27) Dos puntos A y B, están en las orillas opuestas de un río. Otro punto, C, está en la misma orilla del río que B, a una distancia de 230 pies en él. Si el ángulo ABC es de 105° y el ángulo ACB es de 20°, calcule la distancia de A a B a través del río.

¿Cuál es la distancia de A a B a través del río?

La suma de los ángulos internos de todo triángulo es 180°.

$$180° = A + B + C$$

Siendo $B = 105°$ $\Rightarrow A = 55°$

$C = 20°$

Aplicamos la ley del seno, para hallar la distancia $AB = c$

$$\frac{230}{\text{sen}(55^\circ)} = \frac{b}{\text{sen}(105^\circ)} = \frac{c}{\text{sen}(20^\circ)}$$

Despejamos c:

$$\frac{230}{\text{sen}(55^\circ)} = \frac{c}{\text{sen}(20^\circ)} \Rightarrow c = \frac{230\,\text{sen}(20^\circ)}{\text{sen}(55^\circ)}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 96{,}03 \text{ pies}}$$

28 Los ángulos de elevación hacia un avión se miden desde la parte superior y la base de un edificio que tiene 20 m. de altura. El ángulo desde la azotea es de 38°, y desde la base es de 40°. Calcule la altitud del avión.

Altura del avión: $\dfrac{20\tan(50)}{\tan(52) - \tan(50)}$

Paso 1: Para calcular la altitud del avión, se utiliza la relación de los ángulos de elevación desde la azotea y la base del edificio.

Paso 2: se establece la ecuación

$$\frac{h\tan(52)}{20 + h} = \tan(50)$$

Aplicamos la ley del seno, para hallar la distancia $AB = c$

$$\frac{230}{\text{sen}(55^\circ)} = \frac{b}{\text{sen}(105^\circ)} = \frac{c}{\text{sen}(20^\circ)}$$

Despejamos c:

$$\frac{230}{\text{sen}(55^\circ)} = \frac{c}{\text{sen}(20^\circ)} \Rightarrow c = \frac{230\,\text{sen}(20^\circ)}{\text{sen}(55^\circ)}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 96{,}03 \text{ pies}}$$

28 Los ángulos de elevación hacia un avión se miden desde la parte superior y la base de un edificio que tiene 20 m. de altura. El ángulo desde la azotea es de 38°, y desde la base es de 40°. Calcule la altitud del avión.

Altura del avión: $\dfrac{20\tan(50)}{\tan(52) - \tan(50)}$

Paso 1: Para calcular la altitud del avión, se utiliza la relación de los ángulos de elevación desde la azotea y la base del edificio.

Paso 2: se establece la ecuación

$$\frac{h\tan(52)}{20 + h} = \tan(50)$$

28

donde h es la altura del avión y 20 es la altura del edificio

Paso 3: Se despeja la h de la ecuación para obtener la altitud del avión:

$$h = \frac{20 \tan(50)}{\tan(52) - \tan(50)}$$

Paso 4: Para determinar la distancia horizontal entre el edificio y el avión, se multiplica la ~~alto~~ altitud del avión por la tangente del ángulo de elevación desde la azotea del edificio:

$$\frac{20 \tan(50)}{\tan(52) - \tan(50)} \cdot \tan(52)$$

$\boxed{\text{NOP}}$

~~Por lo tanto~~.

Nos piden la altura AB y disponemos de los siguientes datos:

Altura edificio = 20m.

$\measuredangle BDA = 40°$

$\measuredangle BDC = 50°$ (complementario del anterior)

$\measuredangle BCD = 128°$ (suma del recto más el de 38°) 34

$\measuredangle CBD = 2°$

Por ley del seno se calcula el seg-
-mento BD de este modo:

$$\frac{20}{\text{sen } 2°} = \frac{BD}{\text{sen } 128°}$$

$$BD = \frac{20 * 0{,}788}{0{,}035} = 450$$

Conocido ese lado, es la hipotenusa del Δ rectángulo ABD, y sólo queda usar la fun-
1-ción seno del ángulo de 40° para llegar a la solución. sen 40° = 0,64

BA (altura del avión) = sen 40° * 450 = 0,64 * * 450 = 289 metros.

(29) Dos torres vigía están situadas en las cumbres de las montañas A y B, a 4 millas de distancia. Un equipo de bom-
-beros en helicóptero está en un ~~punto~~ valle en el punto C, a 3 millas de A y a 2 millas de B. Usando la línea entre A y B como referencia, un vigía ve un incendio en

$\measuredangle BCD = 128°$ (suma del recto más el de 38°) 34

$\measuredangle CBD = 2°$

Por ley del seno se calcula el seg-
-mento BD de este modo:

$$\frac{20}{\text{sen } 2°} = \frac{BD}{\text{sen } 128°}$$

$$BD = \frac{20 * 0{,}788}{0{,}035} = 450$$

Conocido ese lado, es la hipotenusa del Δ rectángulo ABD, y sólo queda usar la fun-
1-ción seno del ángulo de 40° para llegar a la solución.

$\text{sen } 40° = 0{,}64$

BA (altura del avión) = $\text{sen } 40° * 450 = 0{,}64 *$
$* 450 = 289$ metros.

(29) Dos torres vigía están situadas en las cumbres de las montañas A y B, a 4 millas de distancia. Un equipo de bom-
-beros en helicóptero está en un ~~[illegible]~~ valle en el punto C, a 3 millas de A y a 2 millas de B. Usando la línea entre A y B como referencia, un vigía ve un incendio en

Un ángulo de 40° de la torre A, y a 82° de la torre B. ¿A qué ángulo, medido a partir de $\overrightarrow{CB}$, debe variar el helicóptero para dirigirse hacia el incendio? 29

Usaremos el teo. del coseno, la figura es un triángulo rectángulo.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos A$

$\cos A = a^2 - b^2 - c^2 / -2bc$

$ABC = 180° - 40° - 82°$

$ABC = 58°$

Sea C el punto del incendio. Determnemos BD y AD:

$BD = 4 \text{ sen } 40° / \text{sen } 58°$

$BD = 4 * 0,643 / 0,848$

$BD = 3,03$

$AD = 4 \text{ sen } 82° / \text{sen } 58°$

$AD = 4 * 0,99 / 0,848$

$AD = 4,67$

$$Area^2 = \frac{1}{16}(2s)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)$$

$$Area^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$Area = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

31) Un brazo robótico bidimensional "sabe" donde está, porque mantiene registro del ángulo α de su "hombro" del ángulo de su "codo". Como se ve, este brazo tiene un pto. fijo de rotación en el origen. El ángulo del hombro se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde el brazo hasta el antebrazo. Suponga que el brazo y el antebrazo tiene 2 de longitud, y que el ángulo β del codo no puede "dislocarse" más allá de 180°. Calcule los ángulos α y β que pongan la mano del robot en el punto (1,2).

Los ángulos α y β que pongan la mano del robot en el punto (1,2). son:

$\alpha = 119{,}43°$ y $\beta = 67{,}97°$

Los ángulos α y β que pongan la mano del robot en el punto (1,2) se calculan mediante la aplicación del teo. de pitágoras, ley del coseno y ley del seno de la siguiente manera:

31

Teorema de pitágoras:

$h^2 = cat^2 + cat^2$

$h^2 = 1^2 + 2^2$

$h = \sqrt{5}$

Ley del coseno

$(\sqrt{5})^2 = 2^2 + 2^2 - 2 * 2 * 2 * \cos\beta$

$\Rightarrow \beta = 67{,}97^\circ$

Ley del seno:

$2 / \text{sen}\ \phi = \sqrt{5} / \text{sen}\ 67{,}97^\circ$

$\boxed{\phi = 56{,}008^\circ}$

El ángulo α: $\alpha = 63{,}43^\circ + 53{,}008 = 119{,}43^\circ$

---

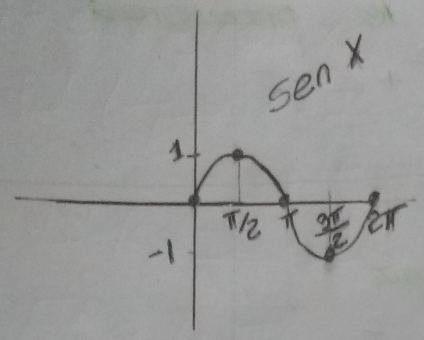
32 ⓐ $y = \sin(\ x)$ $\quad y = A\ \text{sen}\ (Bx + D) \pm C$

Amplitud $= A$ $\quad$ Período $= 2\pi / B$ $\quad$ Desface Horizontal $= \frac{-D}{B}$

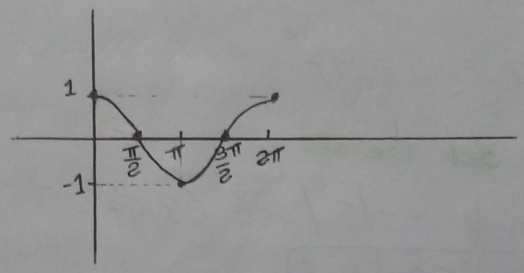
Desface Vertical $= C$

Amplitud $= 1$ $\quad$ Período $= 2\pi$ $\quad$ Desface Horizontal $= \frac{0}{1}$

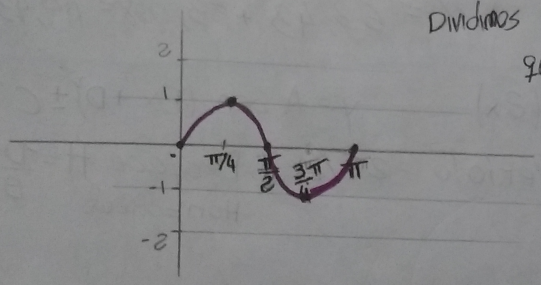
34



$y = \cos x$



② $\sin 2x$ Período $= \pi$



Dividimos el período por 4 que son los puntos en el eje x y luego vamos sumando el período/4 a cada punto

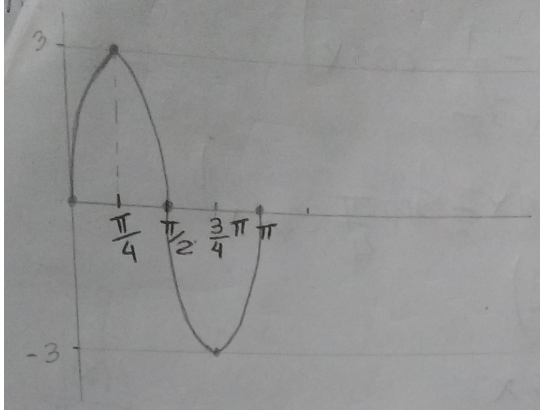
$\frac{180}{x} = 135$

$180x = 135$

$\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3}$

32

ⓒ $y = 3 \sin 2x$



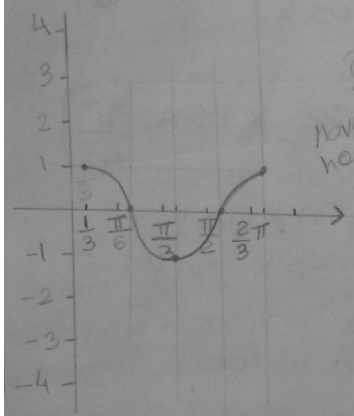
Período $= \frac{2\pi}{B}$

Período $= \pi$

ⓓ $y = \cos(3x - 1)$

$\frac{2}{3}\pi = 120$

$\frac{120}{4} = 30$



?

Movemos hacia la derecha

Desface Horizontal $= \frac{-1}{3}$

$0,3333$

$3 \overline{)10}$

-9

10

-9

1

$= \frac{1}{3}$

$180x = 90$

ⓔ $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Movemos izquierda

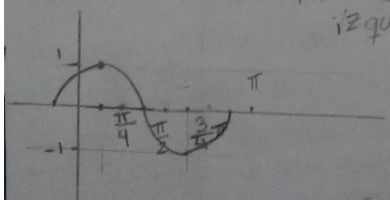
Amplitud $= 1$

Desface Vertical $= 0$

Periodo $= 2\pi/2 = \pi$

Desface Horizontal $= \frac{45}{2}$

$= 22,5$



$\sin\left(2 \cdot \left(\frac{45}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sin 2 \cdot \left(\frac{45}{2} + \frac{180}{4}\right) + 180/4 = 1$

(f') $y = \sin x - \cos x$

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

(f) $y = \sin x + \cos x$

$f(x)$	
0	1
90	1
135	0
180	-1

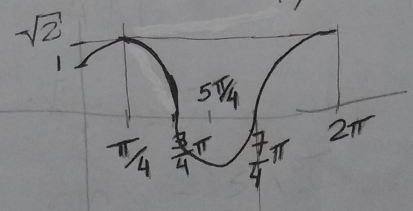
Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{2}$

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$y = \sqrt{2}\left(\sin x . \cos\frac{\pi}{4} + \cos x . \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Aplicamos $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x . \sin y$

$$y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$



$= \sqrt{1-(3/5)^2} = \pm 4/5$

Características del gráfico:

33

$\sin x + \cos x$

Amplitud: La amplitud del grafico es $\sqrt{2}$ que es la suma del máximo valor (1) de ela función coseno y el máximo valor (1) de la función seno.

Período: La función seno, como coseno tienen un período de 2π, lo que significa que el gráfico completará un ciclo completo en 2π unidades de x.

Desplazamiento de fase: No hay desplazamiento de fase en esta ecuación porque tanto las funciones de coseno como las del seno comienzan sus valores máximos en 0.

Interceptaciones: El gráfico interseca el eje x en los puntos donde $y=0$. Estos puntos ocurren ~~ap~~ aproximadamente en $x = -0,785$ (para el componente seno) y $x = 2,356$ (para el componente coseno) y sus valores se repiten en intervalos del período.

Valores máximos y mínimos: El valor máximo de la función combinada se produce en los puntos en los que los componentes seno y coseno están en sus valores máximos. Esto ocurre aprox. a $x = 0,785$ y $x = 3,927$, con su valor de $\sqrt{2}$ (aprox. 1,414). El valor mínimo se

produce en los puntos en los puntos en los que ambos componentes están en sus valores mínimos, que son aprox. $x=2,356$ y $x = 5,498$, con un valor de $-\sqrt{2}$.

9) $y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

Amplitud $= 2$ Período $= \frac{2\pi}{1/2} = 720^{\circ} = 4\pi$

Desfoce Vertical $= 0$

Desfoce Horizontal $= \frac{+\pi/4}{1/2} = +90 = +\frac{\pi}{2}$

$y = A.\,sen(ax + \alpha) + D$

A = Amplitud / Período $= 2\pi/a$ / Desfoce $= -\alpha/a$

D = desplazamiento vertical

(33) Evaluar: 34

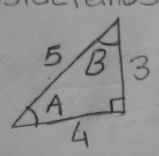
(a) $\cos(\arcsin 3/5)$

El rao La relación 3/5 es una pista.

Tenga en cuenta que $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y si $0 < x < 1$ entonces $\arcsin(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Entonces $\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ es un ángulo en Q1 (1er cuadrante), el cual podemos considerar en un triángulo rectángulo.

Consideremos un 3,4,5 triángulo (derecho)



Tenemos $\sin A = \frac{O}{H} = \frac{3}{5}$

$\cos A = \frac{A}{H} = \frac{4}{5}$

Así que:

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \cos(A) = \frac{4}{5}$$

Alternativamente, podemos notar más generalmente que: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Por lo tanto: $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

Si $\theta = \arcsin(x)$, ents. $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y por lo tanto $\cos\theta \geq 0$ y encontramos:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-(3/5)^2} = \pm 4/5$$

ⓑ $\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

Notemos q. $\theta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ está en el 2do cuadrante ya que $-\frac{2}{3} < 0$.
En el 2do cuadrante sin es positivo.
Sabemos $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ del teo. de pitágoras, por lo tanto:

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

En nuestro caso queremos la raíz cuadrada positiva y hallamos:

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1-4/9} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ⓒ $\tan\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$

Como tangente y arcotangentes son inversos se cancelan. Por lo tanto el resultado es $-\frac{3}{4}$

35

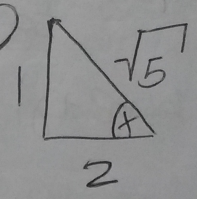
(d) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$

Igual al primero.

(34) Demostrar que:

(a) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2}$

(i)

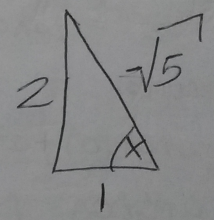


$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = x$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{O}{H}$

$\tan x = 1/2$

(ii)



$\sin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = y$

$\sin y = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\tan y = 2 \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = y$

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = x + y$

$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}(2) =$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\operatorname{sen}^{-1} x = \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ 1/3

$$\therefore \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

b) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

tan

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1 - \tan\alpha\tan\beta - \tan\alpha\tan\gamma - \tan\beta\tan\gamma}$$

Tomando arctan de ambos lados, y sea:

$a := \tan\alpha$, $b := \tan\beta$, $c := \tan\gamma$

obtenemos:

$$\arctan(a) + \arctan(b) + \arctan(c) = \arctan\left(\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}\right)$$

Resta reemplazar a, b, c por sus respectivos valores para obtener: $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Otra forma: $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$

ents. $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

Por lo tanto.

36

$$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \arctan\left(\frac{1/5 + 1/8}{1 - 1/40}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$$

$$\tan x = \tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}\right)$$

Luego hay una formula para $\tan(a+b+c)$ pero si no te lo acordás podés usar la fórmula de $\tan(a+b)$ y escribir $\tan(a+b+c)$ como $\tan(a+(b+c))$.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

El resto es aritmética, al final tenés que chequear que $\arctan \tan x$ es la solución correcta, o si está movido algunos múltiplos de π. Si no te acordás la fórmula de $\tan(a+b)$ podés derivarla sabiendo que $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

Trabajo Práctico Nº 2: Números Complejos

① Expresar el resultado de las sig. operaciones como números imaginarios puros:

ⓐ $\sqrt{-\frac{3}{4}} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}} = i\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Sabemos que $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$

ⓑ $\sqrt{-49} = \sqrt{-1}\sqrt{49} = 7i$

ⓒ $\sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{-1} = \frac{2}{3}i$

ⓓ $\sqrt{-72} = \sqrt{72}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{9*8}\cdot\sqrt{-1} =$

$\sqrt{9}*\sqrt{8}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{-1} =$

$= 3\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot i = 6\sqrt{2}i$

ⓔ $\sqrt{-75} = \sqrt{3.5.5}\sqrt{-1} = 5\sqrt{3}i$

ⓕ $\sqrt{-\frac{27}{100}} = \sqrt{-1}\cdot\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{100}} = i\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{10^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{10}$

$\Rightarrow 4-K = 4 \Rightarrow -K = 0 \Rightarrow \boxed{K=0}$

Trabajo Práctico N° 2: Números Complejos

① Expresar el resultado de las sig. operaciones como números imaginarios puros:

ⓐ $\sqrt{-\frac{3}{4}} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}} = i\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Sabemos que $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$

ⓑ $\sqrt{-49} = \sqrt{-1}\sqrt{49} = 7i$

ⓒ $\sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{-1} = \frac{2}{3}i$

ⓓ $\sqrt{-72} = \sqrt{72}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{9*8}\cdot\sqrt{-1} =$

$\sqrt{9}*\sqrt{8}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{-1} =$

$= 3\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot i = 6\sqrt{2}\,i$

ⓔ $\sqrt{-75} = \sqrt{3.5.5}\,\sqrt{-1} = 5\sqrt{3}\,i$

ⓕ $\sqrt{-\frac{27}{100}} = \sqrt{-1}\cdot\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{100}} = i\frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{10^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{10}$

$\Rightarrow 4-K = 4 \Rightarrow -K = 0 \Rightarrow \boxed{K=0}$

② Calcular las sig. potencias de la unidad imaginaria. 37

ⓐ $i^{14} = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 = \text{impar} = -1$

$= (i^2)^7 = (-1)^7 = -1$

ⓑ $i^{20} \quad \frac{20}{2} = 10 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 =$

10 es par por lo tanto $= i^{20} = (i^2)^{10} = (-1)^{10} = 1$

ⓒ $i^{16} \quad \frac{16}{2} = 8 \therefore i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1$

ⓓ $(-i\,5)^5 = (-i)^{25} = \underbrace{\left(\underbrace{(-i)^2}_{-1}\right)^{12}}_{1} \cdot (-i) = -i$

$(i^a)^b = i^{a \cdot b} \quad (-1)^{\text{par}} = 1$

$(-1)^{\text{impar}} = -1$

$i^a \cdot i^b = i^{a+b} \quad i^2 = -1$

$(-i)^2 = (-1)^2 (i)^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

ⓔ $i^{13} = \underbrace{(\overbrace{i^2}^{-1})^6}_{1} \cdot i = 1i = i$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 13 \\ & 6,5 \\ & -12 \\ & 10 \\ & -10 \\ & 0 \end{array}$$

ⓕ $i^{-10} = \frac{1}{i^{10}} = \frac{1}{(i^5)^2} = \frac{1}{(i^2)^5} = \frac{1}{(-1)^5} = -1$

③ Calcular la parte real e imaginaria de $\frac{\bar{z}}{1+z^2}$. ¿A qué subconjunto de $\mathbb{C}$ pertenece z?

No hace falta (*)

$z = a+ib$
$\bar{z} = a-ib$
$(a-ib)^2 = a^2-2iba-b^2$

$$\frac{\bar{z}}{1+z^2} \cdot \frac{1+\bar{z}^2}{1+\bar{z}^2} = \frac{\bar{z}+\bar{z}^3}{1+\bar{z}^2+z^2+z^2\bar{z}^2} =$$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$$= \frac{(a-ib)+(a+ib)^3}{1+(a-ib)^2+(a+ib)^2+(a+ib)^2\cdot(a-ib)^2} =$$

real

$$= \frac{(a-ib)+(a^3+3a^2(ib)+3a(ib)^2+(ib)^3)}{1+(a^2+2a(-ib)-b^2)+(a^2+2a(ib)+(ib)^2)+(a^2+2a(ib)+(ib)^2)*}$$

$$*(a^2-2aib-b^2)\}$$

⚠ ser cuidadoso con signos al usar nº imaginarios

Agrupamos nº imaginarios y números reales

$(ib)^3 = (ib)^2(ib) = -1\cdot b^2(ib)$

$$= \frac{a^3+a+3a(-1)b+[b+3a^2b+(-b^3)]i}{1+a^2-b^2+a^2-b^2+(a^2-2aib-b^2)*(a^2-2aib-b^2)}$$

$$= \frac{a^3+a-3ab+[-b+3a^2b-b^3]i}{1+2a^2-2b^2+a^4-2a^3ib-b^2a^2-2a^3ib+4a^2i^2b^2+2aib^3-b^2a^2+b^3\cdot 2ai+b^4}$$

NOP: había una forma más sencilla

$$= \frac{a^3+a-3ab+[-b+3a^2b-b^3]i}{1+2a^2-2b^2+a^4-b^2a^2-4a^2b^2-b^2a^2+b^4+(2a^3b-2a^3b+2ab^3+b^3 2a)i}$$

Mal

$$Re\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{a^3+a-3ab}{1+2a^2-2b^2+a^4-b^2a^2-4a^2b^2-b^2a^2+b^4} =$$

$$= \frac{a^3+a-3ab}{1+a^2(2+a^2-b^2-4b^2-b^2)+b^2} = \frac{a^3+a-3ab}{1+a^2(-6b^2+a^2+2)+b^2}$$

$\Rightarrow 4-K=4 \Rightarrow -K=0 \Rightarrow \boxed{K=0}$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{-b+3a^2b-b^3}{-4a^3b+4ab^3}$$

38

¿A qué subconjunto de $\mathbb{C}$ pertenece z?

Los nº complejos son reales si $z=\bar{z}$. Para $z=a+bi$ decimos que z es real si $b=\operatorname{Im}(z)=0$.

Si resolvemos el ejercicio anterior de esta manera:

$$\frac{\bar{z}}{1+z^2}\cdot\frac{z}{z} = \frac{(a-ib)(a+ib)}{(a+ib)+(a+ib)^2\cdot(a+ib)}$$

llegamos a $\dfrac{a^2+b^2}{(a+ib)+(a+ib)^3} = (*)$

es decir la $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \dfrac{0}{(a+ib)+(a+ib)^3} = 0$

entonces $z \in \mathbb{R}$.

NOP Hecho pág. 39

$$(*)\ \frac{a^2+b^2}{(a+ib)+(a^3+3a^2(ib)+3a(ib)^2+(ib)^3)}$$

Duda

$$= \frac{a^2+b^2}{a+a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3+b)i}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{a^2+b^2}{a+a^3-3ab^2}$$

$\Rightarrow 4-K=4 \Rightarrow -K=0 \Rightarrow \boxed{K=0}$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{-b+3a^2b-b^3}{-4a^3b+4ab^3}$$

38

¿A qué subconjunto de $\mathbb{C}$ pertenece z?

Los nº complejos son reales si $z=\bar{z}$. Para $z=a+bi$ decimos que z es real si $b=\operatorname{Im}(z)=0$.

Si resolvemos el ejercicio anterior de esta manera:

$$\frac{\bar{z}}{1+z^2}\cdot\frac{z}{z} = \frac{(a-ib)(a+ib)}{(a+ib)+(a+ib)^2\cdot(a+ib)}$$

llegamos a $\dfrac{a^2+b^2}{(a+ib)+(a+ib)^3} = (*)$

es decir la $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \dfrac{0}{(a+ib)+(a+ib)^3} = 0$

entonces $z \in \mathbb{R}$.

NOP Hecho pág. 39

$$(*)\quad \frac{a^2+b^2}{(a+ib)+(a^3+3a^2(ib)+3a(ib)^2+(ib)^3)}$$

Dude

$$= \frac{a^2+b^2}{a+a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3+b)i}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{a^2+b^2}{a+a^3-3ab^2}$$

$\Rightarrow 4-K=4 \Rightarrow -K=0 \Rightarrow \boxed{K=0}$

④ Calcular $\left| \dfrac{(2+\sqrt{5}i)(1+\sqrt{3}i)^3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}i} \right| =$

$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\frac{|(2+\sqrt{5}i)| * |(1+\sqrt{3}i)|^3}{|\sqrt{5}+\sqrt{3}i|} =$$

$$\frac{\sqrt{2^2+5} * \sqrt{1^2+3}^{\,3}}{\sqrt{5+3}} = \frac{\sqrt{9} * \sqrt{4}^{\,3}}{\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{3*8}{\sqrt{8}} = \frac{24}{\sqrt{8}} = 6\sqrt{2}$$

⑤ Calcular los nros. complejos z tales que $W = \dfrac{2z-i}{2+iz}$ es:

ⓐ un nro. real

ⓑ un nro. imaginario puro.

$\Rightarrow 4-k=4 \Rightarrow -k=0$

③ Calcular parte real e imaginaria de $\dfrac{\bar{z}}{1+z^2}$ 39

$$\boxed{\begin{aligned} z &= x+iy \\ \bar{z} &= x-iy \end{aligned}}$$

$$\frac{\bar{z}}{1+(z)^2} = \frac{x+iy}{1+(x+iy)^2} = \frac{x+iy}{1+x^2-y^2+2xyi} =$$

$$= \frac{(x-iy)(1+x^2-y^2-2xyi)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} = \frac{x+x^3-3xy^2+i(-y-3x^2y+y^3)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

$$= \frac{x+x^3-3xy^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} + i\left[\frac{-y-3x^2y+y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}\right]$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{x+x^3-3xy^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{-y-3x^2y+y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

---

⑤ ⓐ Para que sea real $z = \bar{z}$

$$w = \frac{2z-i}{2+iz} = \frac{2x+i(2y-1)}{2-y+ix} = \frac{(2x+i(2y-1))(2-y-ix)}{(2-y)^2+x^2} =$$

$$= \frac{3x+i(-2x^2-2y^2+5y-2)}{(2-y)^2+x^2}$$

Por tanto w es real si: $\overbrace{-2x^2-2y^2+5y-2}=0$

$\Rightarrow 4-K=4 \Rightarrow -K=0 \Rightarrow \boxed{K=0}$

$\Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{5}{4})^2 = \frac{9}{16}$

Es decir, z está en centro $(0, 5/4)$ y radio $3/4$.

Análogamente, w es imaginario puro si y sólo si, $x = 0$, es decir, z está en el eje imaginario.

④ Calcula los nros. complejos z tales que $w = \frac{z-1-i}{z+1+i}$

ⓐ es un nro. real

$$w = \frac{z-1-i}{z+1-i} = \frac{x-1+i(y-1)}{x+1+i(y+1)} = \frac{(x-1+i(y-1))(x+1-i(y+1))}{(x+1)^2+(y+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2+i(2y-2x)}{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

Por tanto, w es real si y sólo si, $y = x \neq -1$, es decir, z está en la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero y $z \neq -(1+i)$

Es claro que $|w| = 1$ si y sólo si

$|z-1-i| = |z+1+i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow x + y = 0$

$\Rightarrow 4 - k = 4 \Rightarrow -k = 0$

$\Longleftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

Es decir, z está en centro $(0, 5/4)$ y radio $3/4$.

Análogamente, w es imaginario puro si y sólo si, $x=0$, es decir, z está en el eje imaginario.

④ Calcula los nros. complejos z tales que $w = \dfrac{z-1-i}{z+1+i}$

ⓐ es un nro. real

$$w = \frac{z-1-i}{z+1-i} = \frac{x-1+i(y-1)}{x+1+i(y+1)} = \frac{(x-1+i(y-1))(x+1-i(y+1))}{(x+1)^2+(y+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2+i(2y-2x)}{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

Por tanto, w es real si y sólo si, $y = x \neq -1$, es decir, z está en la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero y $z \neq -(1+i)$

Es claro que $|w|=1$ si y sólo si

$|z-1-i| = |z+1+i| \Longleftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y+1)^2 \Longleftrightarrow x+y=0$

Es decir, z está en la bisec- 40
- triz de los cuadrantes segundo y cuarto.

Es decir $2y - 2x = 0 \Rightarrow x = y$

y $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$(y+1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1$

Luego $x = y \neq -1$ para que w sea real

7. Simplificar $\dfrac{a-bi}{c+di} + \dfrac{a+bi}{c-di} =$

$$\frac{(a-bi)(c-di)+(a+bi)(c+di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac \cancel{-dia} \cancel{-bic} + dbi^2 + ac \cancel{+dia} \cancel{+bic} + bdi^2}{c^2 \cancel{-dic} \cancel{+dic} - d^2 i^2}$$

$$= \frac{2ac-2db}{c^2+d^2} = \frac{2(ac-db)}{c^2+d^2} = \frac{2(ac-db)}{(c-id)(c+id)}$$

8. Determinar los reales a y b que satis- facen: $(-1+i)a + (1+2i)b = 1$

$-1a + ia + b + 2ib = 1 \Rightarrow -a + b + ia + 2ib = 1$

$\Rightarrow -a + b + (a+b)i = 1 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \boxed{a = -b}$

$-(-b) + b = 1 \Rightarrow b + b = 1 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

⑨ Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1+i)x - iy = 2+i \\ (2+i)x + (2-i)y = 2i \end{cases}$$

$(1+i)x - iy + (2+i)x + (2-i)y = 2+i+2i \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x} + \cancel{ix} - \cancel{iy} + \cancel{2x} + \cancel{ix} + \cancel{2y} - \cancel{iy} = 2+3i$

$\Rightarrow 3x + 2ix - 2iy + 2y = 2+3i$

Nope

$\Rightarrow (3x+2y) + (2x-2y)i = 2+3i$

$$\begin{cases} 3x+2y = 2 \Rightarrow 2y = 2-3x \Rightarrow y = \dfrac{2-3x}{2} \\ 2x-2y = 3 \Rightarrow 2x - \cancel{2}\left[\dfrac{2-3x}{\cancel{2}}\right] = 3 \Rightarrow \end{cases}$$

$2x - [2-3x] = 3 \Rightarrow 2x - 2 + 3x = 3 \Rightarrow$

$5x = 5 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$y = \dfrac{2-3.1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{-1}{2}}$

$(2+i)1 + (2-i)\frac{1}{2}$

$x + ix - iy = 2+i$

$x + (x-y)i = 2+i$

$\begin{cases} x = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$2+i+1-\frac{1}{2}i$

$(2+ix)+2y-iy=2i$

$2x+2y+(x-y)i=2i$

$4x+4y=0$

$x-y=2i$

41

⑨ Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (1+i)x - iy = 2+i \\ (2+i)x + (2-i)y = 2i \end{cases}$$

$x + ix - iy = 2+i \Rightarrow x + (x-y)i = 2+i$ (1)

$2x + ix + 2y - iy = 2i \Rightarrow 2x + 2y + (x-y)i = 2i$ (2)

$$\begin{cases} -x - 2y = 2 - i \\ -x - 2y = 2 \Rightarrow -x = 2 + 2y \Rightarrow \boxed{x = -2 - 2y} \\ (-2-2y) + [(-2-2y) - y]i = 2+i \end{cases}$$

$-2 - 2y - 2i - 2iy - yi = 2 + i \Rightarrow$ NOP.

$\Rightarrow -2 - 2y + (-2 - 2y - y)i = 2 + i$

$-2 - 2y = 2 \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow \boxed{y = -2}$

$x = -2 - 2(-2) \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$2 + 2i + 2i$

$2 + 4i$

$(1+i)2 - i(-2)$

$2 + 2i - i(-2) = 2$

Multiplicar por el conjugado del denominador

⑨ $\begin{cases} (1+i)x - iy = 2+i \\ (2+i)x + (2-i)y = 2i \end{cases}$

NOP

$(1,1)x + (0,-1)y = (2,1)$

$(2,1)x + (2,-1)y = (0,2)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} (1,1) & (0,-1) & (2,1) \\ (2,1) & (2,-1) & (0,2) \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 \leftarrow f_2 - f_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} (1,1) & (0,-1) & (2,1) \\ (1,0) & (2,0) & (-2,1) \end{array}\right]$$

---

⑨ $\begin{cases} (1+i)x - iy = 2+i \\ (2+i)x + (2-i)y = 2i \end{cases}$

$(-2-i)\left[(1+i)x - iy\right] = (-2-i)(2+i)$

$(-2-i)(1+i)x + (-2-i)(-i)y = (-2-i)(2+i)$

$\left[-2(1+i) - i(1+i)\right]x + (+2i+i^2)y = -4-2i-2i-i^2$

$\left[-2-2i-i-i^2\right]x + (+2i+1)y = -4-4i+1$

$[-3i-1]x + [+2i-1]y = -3-4i$

$(1+i)\left[(2+i)x + (2-i)y\right] = (1+i)2i$

$(1+i)(2+i)x + (1+i)(2-i)y = 2i+2i^2$

$(2+i+2i+i^2)x + (2-i+2i-i^2)y = 2i+(-2)$

$(1+3i)x + (3+i)y = 2i-2$

42

$$(-3i-1)x + (+2i+1)y = -3-4i$$
$$+$$
$$(3i+1)x + (3+i)y = 2i-2$$

$$(+2i-1)y + (3+i)y = -3-4i+2i-2$$
$$-y+2iy+3y+iy = -5-2i$$
$$(-1+2i+3+i)y = -5-2i$$
$$(2+3i)y = -5-2i$$
$$y = \frac{-5-2i}{2+3i} \Rightarrow y = \frac{-5-2i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-10+15i-4i+6i^2}{4-\cancel{6i+6i}-3^2i^2} = \frac{-16+11i}{4+9} = \boxed{\frac{-16+11i}{13}}$$

Ahora reemplazamos el y en la 1era ecua-
-ción $(1+i)x - i*[(-16+11i)/13] = 2+i$

$$(1+i)x + \frac{16i-11i^2}{13} = 2+i \Rightarrow (1+i)x + \frac{16i}{13} + \frac{11}{13} = 2+i$$

$$\Rightarrow (1+i)x = 2+i - \frac{16}{13}i - \frac{11}{13} \Rightarrow \frac{15}{1}$$

$$(1+i)x = \frac{15}{13} - \frac{3}{13}i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{15}{13} - \frac{3}{13}i\right) / (1+i)$$

$$\Rightarrow 4-K = 4 \Rightarrow -K = 0 \Rightarrow \boxed{K=0}$$

$$x = \frac{\left(\frac{15}{13} - \frac{3}{13}i\right)}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{15}{13} - \frac{15}{13}i - \frac{3}{13}i + \frac{3}{13}i^2}{1-i+i-i^2} \Rightarrow x = \frac{\frac{12}{13} - \frac{18}{13}i}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{6}{13} - \frac{9}{13}i}$$

(10) Resolver las ecuaciones dadas completando cuadrados.

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

(a) $x^2 + 5x + 7 = 0$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 7 = 0$$

$2 \times 1 \times b = 5$

$\Rightarrow \boxed{b = 5/2}$

(b) $2x^2 + 10x + 15 = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{2}\, b = 10$

$\Rightarrow \boxed{b = \frac{10}{2\sqrt{2}}}$

$$\left(\sqrt{2}x + \frac{10}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

(c) $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 \cdot b = -1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{-1}{2}}$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

$\Rightarrow x = \sqrt{4-K} - 2 \Rightarrow \sqrt{4-K}$

$\Rightarrow 4 - K = 4 \Rightarrow -K = 0 \Rightarrow \boxed{K = 0}$

43

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ⓓ $3x^2 - 8x + 7 = 0$

$$\left(\sqrt{3}\,x - \frac{8}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{8}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 7 = 0$$

$$2\sqrt{3}\,b = -8 \Rightarrow b = \frac{-8}{2\sqrt{3}} \Rightarrow b = \frac{-4}{\sqrt{3}}$$

ⓔ $2x^2 - 6x + 5 = 0$

$$\left(\sqrt{2}\,x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 5 = 0$$

$$2.\sqrt{2}\,b = -6 \Rightarrow b = -6/(2\sqrt{2}) \Rightarrow b = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ⓕ $3x^2 - 2x + 1 = 0$ $\quad 2.\sqrt{3}\,b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{2\sqrt{3}}$

$$\left(\sqrt{3}\,x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = 0$$

---

11. Determinar K, tal que el conjunto solución de la ecuación dada en x contenga: (a) dos nros. reales; (b) dos nros. complejos de la forma a+bi, y a-bi, donde a y b ≠ 0 son nros. reales.

ⓐ $x^2 + 4x + K = 0$ $\quad 2.1.b = 4 \Rightarrow \boxed{b=2}$

$$(x+2)^2 - 2^2 + K = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2^2 - K} - 2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{4-K} - 2 \Rightarrow \sqrt{4-K} = 2 \Rightarrow 4 - K = 2^2$$

$$\Rightarrow 4 - K = 4 \Rightarrow -K = 0 \Rightarrow \boxed{K=0}$$

La raíz cuadrada de la resolvente debe ser positiva para tener dos soluciones reales, si es 0 posee 1 solución real y si es negativa posee dos soluciones imaginarias.

$$x^2 + 4x + 0 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a.c}}{2a}$$

$$x_1 = (-4 + \sqrt{\overset{>0}{4^2 - 4.1.0}})/2.1 = 0$$

$$x_2 = (-4 - \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 0})/2.1 = -4$$

ⓑ Dos nros. complejos de la forma $a+bi$ y $a-bi$, donde a y $b \neq 0$ y son nros. reales.

Si $b^2 - 4ac < 0$ ents posee soluciones complejas.

$$4^2 - 4.1.c < 0$$

$$4^2 - 4.c < 0 \Rightarrow 4^2 < 4c \Rightarrow \frac{4^2}{4} < c \Rightarrow 4 < c \Rightarrow c > 4$$

ⓑ $x^2 - Kx + 9 = 0$ (soluciones reales)

si $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow K^2 - 4.1.9 > 0$

$\Rightarrow K^2 - 36 > 0 \Rightarrow K^2 > 36 \Rightarrow \boxed{K > 6}$

si $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow K^2 - 4.9 < 0$

$\Rightarrow K < 6$. (soluciones imaginarias)

(12) Si Z y W son complejos 44

se consideran 3 nros.:

$$x = \frac{Z+W}{1+ZW} \qquad y = i\,\frac{W-Z}{1+ZW} \qquad Z = \frac{1-ZW}{1+ZW}$$

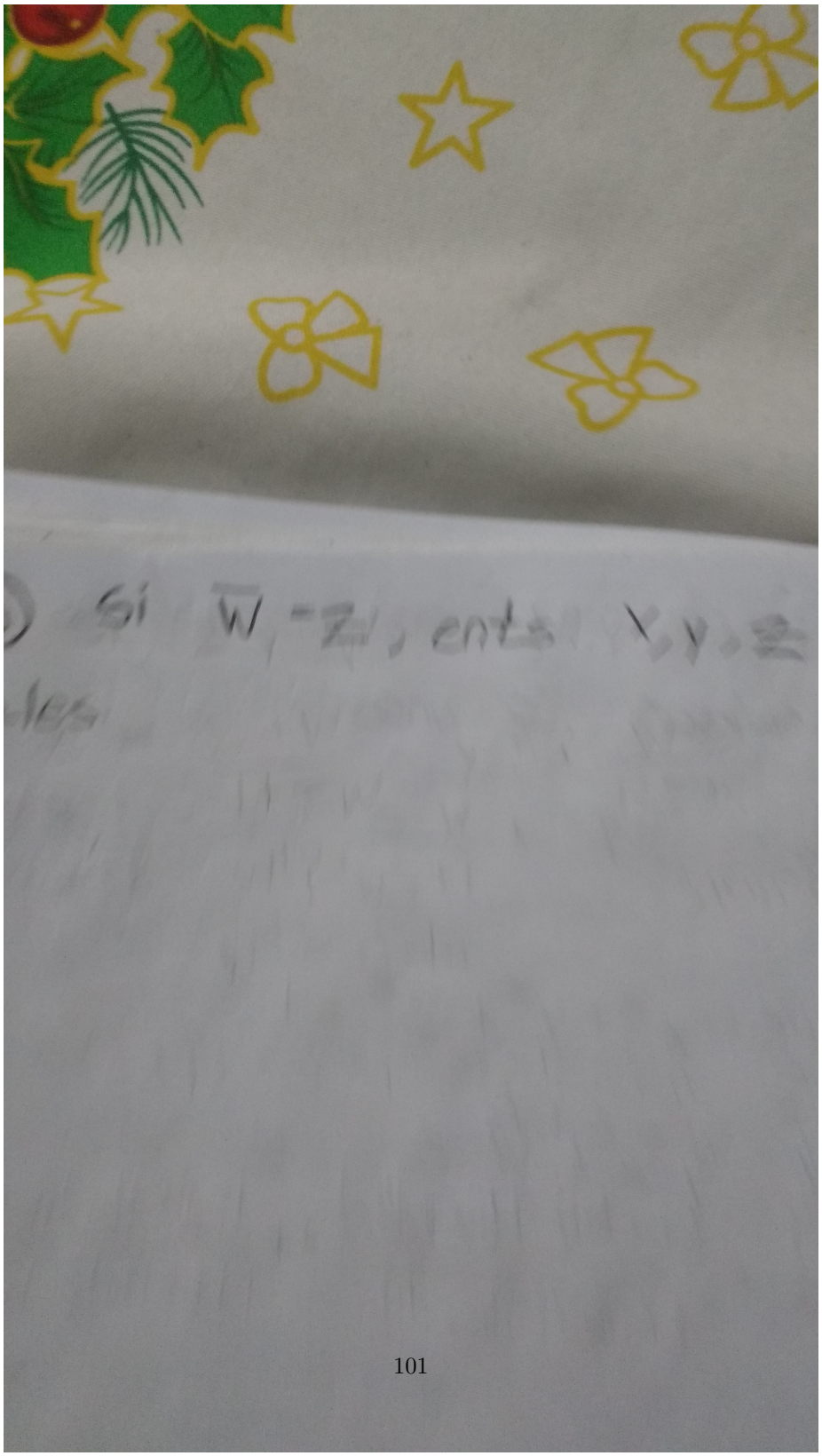
Demostrar que: $x^2+y^2+Z^2=1$

$W, Z = a+bi$ y $W = c+di$

$$\frac{(a+bi)+(c+di)}{1+(a+bi)(c+di)} + \frac{(a+bi)-(c+di)}{1+(a+bi)(c-di)}\,i + \frac{1-[(a+bi)(c+di)]}{1+(a+bi)(c+di)}$$

$$\frac{2(a+bi)}{1+(a+bi)(c+di)}$$

tmb. posee el mismo grado


Si W = Z4, entonces x, y, z

(b) Si $\overline{W} = Z$, ents x, y, z son reales.

112

83

(13) Expresar en forma polar los siguientes nros. complejos: 45

(a) $-1+i$

r = módulo

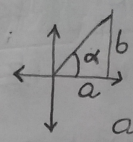
α = argumento

Tenemos que

$$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\arg(-1-i) = \operatorname{arctg}(-1)+\pi =$$

$$= \frac{3\pi}{4}, \text{ por lo que}$$



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \alpha$$

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\,\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

(b) Continuación 45'

deducimos que $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} \in \operatorname{Arg}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)$

Por tanto

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\,\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$$

$$\arg(1+i) = \operatorname{arc\,tg}(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

(c) $\arg(-1+i\sqrt{3}) = \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})+\pi =$

$-\arg\operatorname{tg}(\sqrt{3})+\pi = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2\pi}{3}$, por lo que $\arg\left(\frac{1}{-1+i\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\pi}{3}$. Por tanto

$$\frac{1}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i.\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

59

(14) Calcular los nros. complejos tales que:

$$w = \frac{2z-1}{z-2}$$

(a) tiene argumento igual a $\frac{\pi}{2}$.

Tenemos que $z = x+iy$ con $x,y \in \mathbb{R}$. Como

$$\frac{2z-1}{z-2} = \frac{2x-1+2yi}{x-2+iy} = \frac{(2x-1+2yi)(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{2x^2+2y^2-5x+2-3yi}{(x-2)^2+y^2}$$

deducimos que $\arg w = \frac{\pi}{2}$ si y sólo si $2x^2+2y^2-5x+2=0$ e $y<0$. Como

$$2x^2+2y^2-5x+2=0 \iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}$$

deducimos que $\arg w = \pi/2$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4,0)$ y radio $\frac{3}{4}$ que está contenida en el semiplano inferior. También deducimos que $\arg w = -\frac{\pi}{2}$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4,0)$ y radio $3/4$ que está contenida en el semi-plano superior.

tmb. posee el mismo

$$\frac{1}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i.\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$ 59

(14) Calcular los nros. complejos tales que:

$$w = \frac{2z-1}{z-2}$$

(a) tiene argumento igual a $\frac{\pi}{2}$.

Tenemos que $z = x+iy$ con $x,y \in \mathbb{R}$. Como

$$\frac{2z-1}{z-2} = \frac{2x-1+2yi}{x-2+iy} = \frac{(2x-1+2yi)(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{2x^2+2y^2-5x+2-3yi}{(x-2)^2+y^2}$$

deducimos que $\arg w = \frac{\pi}{2}$ si y sólo si $2x^2+2y^2-5x+2=0$ e $y<0$. Como

$$2x^2+2y^2-5x+2=0 \iff \left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}$$

deducimos que $\arg w = \pi/2$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4, 0)$ y radio $\frac{3}{4}$ que está contenida en el semiplano inferior. También deducimos que $\arg w = -\frac{\pi}{2}$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4, 0)$ y radio $3/4$ que está contenida en el semi-plano superior.

tmb. posee el mismo

$(x-2)^2$

(15) Calcular las soluciones de las ecuaciones: 46

(a) $z^4+(1+i)z^2+5i=0$

Tomando $w=z^2$, la ecuación queda: $w^2+(1+i)w+5i=0$, cuyas soluciones son:

$$\frac{-(1+i)\pm\sqrt{(1+i)^2-20i}}{2}=\frac{-(1+i)\pm\sqrt{-18i}}{2}=$$

$$=\frac{-(1+i)\pm\sqrt{18}\left(\cos(-\pi/4)+i\,\text{sen}(-\pi/4)\right)}{2}=\frac{-(1+i)\pm\sqrt{18}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)}{2}$$

$$=\frac{-(1+i)\pm3(1-i)}{2}=\begin{cases}1-2i\\-2+i\end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación dada son las raíces $\pm\sqrt{1-2i}$ y $\pm\sqrt{-2+i}$. Tenemos que $\arg(1-2i)=-\text{arc tg}\,2$ y $\arg(-2+i)=\pi-\text{arc tg}(1/2)$. Usando que $\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\text{sen}\,x$ y $\text{sen}(x+\pi/2)=\cos x$, obtenemos:

$$\pm\sqrt{1-2i}=\pm\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\text{arc tg}\,2}{2}\right)-i\,\text{sen}\left(\frac{\text{arc tg}\,2}{2}\right)\right)$$

$$\pm\sqrt{-2-i}=\pm\sqrt[4]{5}\left(\text{sen}\left(\frac{\text{arc tg}(\frac{1}{2})}{2}\right)+i\cos\left(\frac{\text{arc tg}(\frac{1}{2})}{2}\right)\right)$$

Observa que las soluciones son nros. complejos pero no son complejos conjugados. La ecuación dada tiene coeficientes complejos.

(16) Dada la siguiente igualdad:

$$|z+w|^2+|z-w| = 2(|z|^2+|w|^2)$$

a. Demostrar la identidad para todo $z, w \in$

Solución Basta realizar las operaciones indicados. Tenemos que:

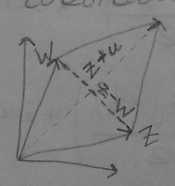
$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w =$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}).$$

$$|z-w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} - z\bar{w} - \bar{z}w =$$

$$|z|^2 + |w|^2 - \mathrm{Re}(z\bar{w})$$

Sumando estas igualdades se obtiene la igualdad del enunciado. Su significado geométrico es que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados.



Observa que las soluciones son nros. complejos pero no son complejos conjungados. La ecuación dada tiene coeficientes complejos.

(16) Dada la siguiente igualdad:

$$|z+w|^2+|z-w| = 2(|z|^2+|w|^2)$$

a. Demostrar la identidad para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Solución Basta realizar las operaciones indicadas. Tenemos que:

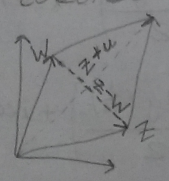
$$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})^2 = z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}w =$$

$$= |z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}).$$

$$|z-w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z}+w\bar{w}-z\bar{w}-\bar{z}w =$$

$$|z|^2+|w|^2-\mathrm{Re}(z\bar{w})$$

Sumando estas igualdades se obtiene la igualdad del enunciado. Su significado geométrico es que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados.



(17) Expresar en forma binó-mica a los numeros 47

ⓐ $(1+i)^{25}$ ⓒ $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}$

Se aplica la fórmula de De Moivre y para ella hay que expresar los nros. en for-ma polar. Consideremos el números $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}$

Tenemos que $|z| = \sqrt{2}$ (cociente de los módulos) y un argumento de z es:

$$\arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(-1+i) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) - (\operatorname{arc\,tg}(-1)+\pi) = \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4}\pi = -\frac{5\pi}{4}$$

Por tanto

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{24} = (\sqrt{2})^{24}\left(\cos\left(-24\,\frac{5\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-24\,\frac{5\pi}{24}\right)\right) =$$

$$= 2^{12} = 4096$$

(18) Haciendo uso de la fórmula de De Moivre, probar que:

a. $\mathrm{sen}(3\phi) = 3\,\mathrm{sen}\,\phi - 4\,\mathrm{sen}^3\phi$

De Moivre: $(\cos x + i.\mathrm{sen}\,x)^n$

Desarrollando la potencia del lado izquier-do por medio del binomio de Newton y agrupar la parte real, que será igual a $\cos(nx)$

y la parte imaginaria, que será igual a sen (nx). Por ejemplo para $n=2$ se obtiene inmediatamente que $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

59

Haciendo $n=3$ obtenemos.

$$\cos^3 x + 3i \cos^2 x \operatorname{sen} x - 3 \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x - i \cdot \operatorname{sen}^3 x =$$
$$= \cos(3x) + i \cdot \operatorname{sen}(3x)$$

Igualando partes imaginarias, resulta:

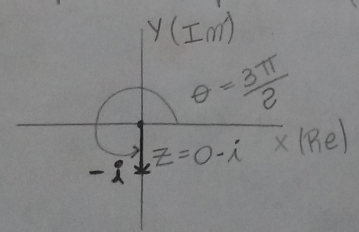
$$\operatorname{sen}(3x) = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x = 3(1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x$$
$$- \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x.$$

Esta es la igualdad ⓐ. Las otras dos igualdades ⓑ y ⓒ se obtiene de una forma parecida.

---

⑲ Encontrar las raíces cúbicas de $z = -i$ y representarlas gráficamente.

$$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{0-i} = (0-i)^{1/3}$$



$r = 1$

$\theta = \frac{3}{2}\pi$

48

$$Z_K = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi K}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+2\pi K}{n}\right)\right]$$

$n=3 \qquad K=0,1,2 \qquad r=1 \qquad \theta=\frac{3}{2}\pi$

$$Z_K = (1)^{1/3}\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi K}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{3}{2}\pi+2\pi K}{3}\right)\right]$$

$$Z_K = \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi K}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi K}{3}\right)$$

$\underline{K=0}$

$$Z_0 = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i\,\underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \Rightarrow \boxed{Z_0 = 0+i = i}$$

$\underline{K=1}$

$$Z_1 = \underbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\,\underbrace{\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)}_{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{Z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$$

tmb. posee el mismo grado.

$K_1 = 2$

$$Z_2 = \underbrace{\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\,\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)}_{-\frac{1}{2}}$$

59

$$\boxed{Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} * i}$$

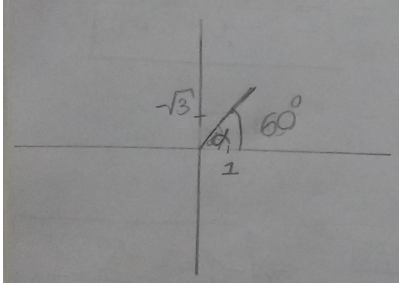
---

20) Calcular y representar graficamen-te la solución:

a) $\sqrt{1+i\sqrt{3}} = (1+i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = (1+i\,3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$r = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}$

$r = \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{r=2}$



arc tg $\frac{b}{a}$

arc tg $\frac{\sqrt{3}}{1} = \alpha$

$\boxed{\alpha = 60^\circ} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$

Forma polar $= 2_{60^\circ}$

tmb. posee el mismo grado.

$$Z_{K_1} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi K}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi K}{n}\right)\right)$$ 49

$n = 2 \qquad K = 0,1 \qquad r = 2 \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$

$$Z_0 = (2)^{1/2}\left[\cos\left(\frac{\pi/3 + 2\pi.0}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/3 + 2\pi.0}{2}\right)\right]$$

$$Z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/3 + 2\pi.1}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/3 + 2\pi.1}{2}\right)\right]$$

$$Z_0 = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}\right] = \boxed{\sqrt{6}/2 + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$Z_1 = \sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i - \frac{1}{2}\right] = \boxed{-\sqrt{6}/2 - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(b) $\sqrt[4]{1-i} = (1-i)^{1/4} \qquad r = \sqrt{2}$

$n = 4 \qquad K = 0,1,2,3$

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{2}^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{7/4\pi + 2\pi.0}{4}\right) + i.\,\text{sen}\left(\frac{7/4\pi + 2\pi.0}{4}\right)\right.}$$

$\theta = 360° + \text{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right)$

$\theta = 360° - 45°$

$\boxed{\theta = 315°}$

tmb. posee el mismo gr...

$$Z_1 = \sqrt{2}^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{7/4\pi + 2\pi.1}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7/4\pi + 2\pi}{4}\right)\right]$$

59

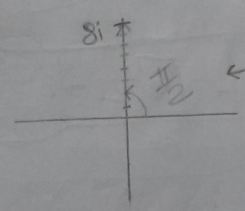
$$Z_2 = \sqrt{2}^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{7/4\pi + 2\pi.2}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7/4\pi + 2\pi.2}{4}\right)\right]$$

$$Z_3 = \sqrt{2}^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{7/4\pi + 2\pi 3}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7/4\pi + 2\pi 3}{4}\right)\right]$$

ⓔ $\sqrt[4]{8i} = (8i)^{1/4}$ $\quad r = \sqrt{8^2} = 8$

$\sqrt[4]{0+8i} = (0+8i)^{1/4}$ $\quad$ arc tg $\frac{8}{0}$ ×

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$



$n = 4$, $K = 0,1,2,3$, $r = 8$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$Z_0 = 8^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi.0}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2\pi 0}{4}\right)\right]$$

$$Z_1 = 8^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi.1}{4}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{4}\right)\right]$$

$$Z_2 = 8^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi.2}{4}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2\pi.2}{4}\right)\right]$$

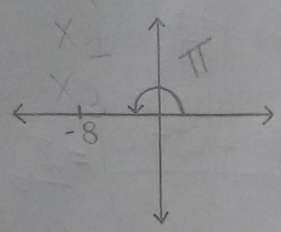
$$Z_3 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi.3}{4}\right) + i.\,\text{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2\pi.3}{4}\right)\right]$$

50

ⓒ $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3}$

$$\text{arc tg}\,\frac{b}{-a} = 180^\circ - \text{arctg}\,0$$

$$\boxed{= 180^\circ}$$



$$r = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$$

$n = 3$, $K = 0,1,2$, $r = 8$, $\theta = \pi$

$$Z_0 = 8^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi.0}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2.\pi.0}{3}\right)\right]$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi.1}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi.1}{3}\right)\right]$$

$$Z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi.2}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2\pi.2}{3}\right)\right]$$

$Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ $\qquad$ $Z_1 = -2$

$$Z_2 = 2\left[\frac{1}{2} + i.\,\frac{-\sqrt{3}}{2}\right] = 1 + i\sqrt{3}$$

tmb. posee el mismo grado.

(f) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i} = (-\sqrt{3}+i)^{\frac{1}{3}}$

$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\text{arc tg } \frac{1}{-\sqrt{3}} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$n = 3$, $K = 0,1,2$, $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$2^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\pi/6 + 2\pi.0}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/6 + 2\pi.0}{3}\right)\right) = Z_0$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi/6 + 2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/6 + 2\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/6 + 2\pi.2}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi/6 + 2\pi.2}{3}\right)\right]$$

---

21. Resolver las ecuaciones $|z| = 4$ y $(\bar{z})^2 = z^2$. Hallar los puntos de intersección de los lugares geométricos que representan las soluciones de dichas ecuaciones.

$z = a + bi$

$4 = \sqrt{a^2+b^2}$

$16 = a^2 + b^2$

tmb. posee el mismo grado.

(f) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i} = (\sqrt{3}+i)^{\frac{1}{3}}$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\text{arc tg } \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$n = 3 \;,\; K = 0,1,2 \;,\; r = 2 \;,\; \theta = \frac{\pi}{6}$

$$2^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\pi/6+2\pi.0}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/6+2\pi.0}{3}\right)\right) = Z_0$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi/6+2\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/6+2\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/6+2\pi.2}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/6+2\pi.2}{3}\right)\right]$$

---

21. Resolver las ecuaciones $|z| = 4$ y $(\bar{z})^2 = z^2$. Hallar los puntos de intersección de los lugares geométricos que representan las soluciones de dichas ecuaciones.

$z = a+bi$

$4 = \sqrt{a^2+b^2}$

$16 = a^2+b^2$

tmb. posee el mismo grado.

51

$\sqrt{a^2+b^2}=4,\ (a-bi)^2=(a+bi)^2$

$a^2-2iab-b^2=a^2+2iba-b^2$

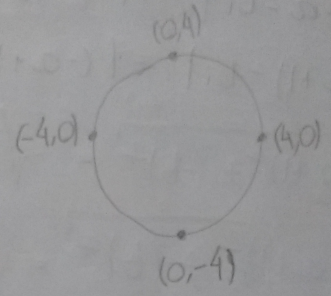
$ab=0$

$a=-4,\ b=0$

$a=0,\ b=-4$

$a=0,\ b=4$

$a=4,\ b=0$



$-2iab=2iba \Rightarrow -4iab=0 \Rightarrow ab=0$

$\{a^2+b^2=16,\ a=0 \vee b=0\}$

(22) Demostrar que:

$$\frac{z-1}{1-z}=\frac{(a+bi)-1}{1-(a+bi)}=\frac{a+bi-1}{1-a-bi}=$$

$$=\frac{\cancel{a+bi-1}}{-(\cancel{a+bi-1})}=-1 \quad \therefore \text{ Es falso, quizás}$$

quisieron escribir $\left|\frac{z-1}{1-\bar{z}}\right|=1$

ⓑ $|1-z| = |1-\bar{z}|$

$|1-(a+bi)| = |1-(a-bi)|$

$|1-a-bi| = |1-a+bi|$

$|(-a+1)-bi| = |(-a+1)+bi|$

$\sqrt{(-a+1)^2+(-b)^2} = \sqrt{(-a+1)^2+(b)^2}$

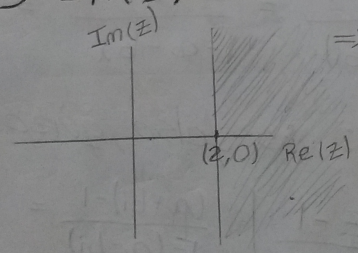
$\sqrt{(-a+1)^2+(b)^2} = \sqrt{(-a+1)^2+b^2}$

$\therefore |1-z| = |1-\bar{z}|$

(23) Describa geométricamente la región determinada por cada una de las siguiente condiciones:

ⓐ $Im(z) \geq 2$ $\quad a+bi \geq 2$

$\Rightarrow a \geq 2$ y $b \in \mathbb{R}$



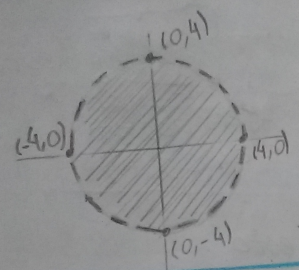
tmb. posee el mismo grado.

52

b. $|Im(z)| < 2$

$|a+bi| < 2 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} < 2$

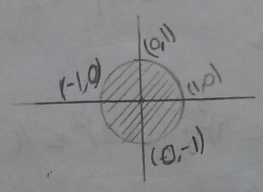
$\Rightarrow \underbrace{a^2+b^2}_{\text{fórmula de una circunferencia}} < 4 \Rightarrow r = 4$



ⓒ $|z| \leq 1 \Rightarrow |a+bi| \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \leq 1 \Rightarrow a^2+b^2 \leq 1$

$\Rightarrow r = 1$



ⓓ $|z+3| = 5$

$|(a+bi)+3| = 5 \Rightarrow |(a+3)+bi| = 5$

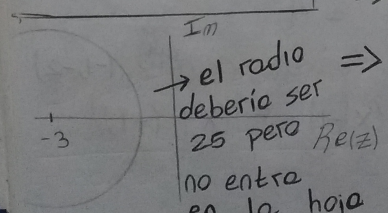
$\Rightarrow \sqrt{(a+3)^2+b^2} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+3)^2+b^2 = 25$

centro de la circunferencia

$\Rightarrow (a-(-3))^2+(b-0)^2 = 25$

$\Rightarrow r = 25$



→ el radio debería ser 25 pero no entra en la hoja

∴ z es cualq. punto en la circunferencia de radio 25 con centro en -3.

tmb. posee el mismo grado.

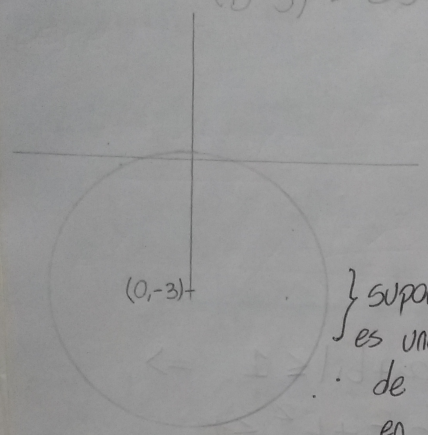
ⓔ $|z-3i| > 5$

$|(a+bi)-3i| > 5 \Rightarrow |a+bi-3i| > 5$

$\Rightarrow |a+(b-3)i| > 5 \Rightarrow \sqrt{a^2+(b-3)^2} > 5$

$\Rightarrow a^2+(b-3) > 25 \Rightarrow (a-0)+\underbrace{(b-3)} > 25$

el centro ahora está en $(0,-3)$ de la circunferencia, con radio mayor a 25.



} supone que esto es una circ. de 25 de radio, porq. no entra en la hoja.

ⓕ $|z-(1+2i)| \leq 2 \Rightarrow |a+bi-(1+2i)| \leq 2$

$\Rightarrow |(a-1)+(b+2)i| \leq 2 \Rightarrow$

$\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2} \leq 2 \Rightarrow (a-1)^2+(b+2)^2 \leq 4$

$\Rightarrow (a-1)^2+(b-(-2))^2 \leq 4$

Es decir, la circunferencia es de centro $(1,-2)$ ya que si tenemos $(x-1) = (x-(+1))$

24) Hallar el lugar geométrico 53
de $Z = \dfrac{a+i}{1+2a+i}$, sabiendo, que $a \in \mathbb{R}$

No lo se

$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = (\cos x \cdot n) + i \cdot \operatorname{sen}(nx)$

Teorema de Moivre

Sea el complejo Z en forma polar:

$$Z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Entonces

$$Z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)),\ n \in \mathbb{Z}$$

---

25 Expresar en términos de la exponencial compleja

ⓐ $(1+i)^3$

e^x, si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$y = e^x$ es la única solución de $y' - y = 0$, $y(0) = 1$

$y = e^x$ es la función inversa de $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

$e^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$

tmb. posee el mismo

Queremos definir e^z para $z \in \mathbb{C}$

Sea $z = x + iy$ Queremos que se cumpla

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

Veamos que pasa si calculamos e^{iy} con la serie

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots$$

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{i^2 y^2}{2} + \frac{i^3 y^3}{3!} + \frac{i^4 y^4}{4!} + \frac{i^5 y^5}{} + \dots$$

$$i^2 = -1 \; ; \; i^3 = -i \; ; \; i^4 = 1 \; ; \; i^5 = i$$

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \dots$$

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{iy} = \cos(y) + i\operatorname{sen}(y)$$

Queremos definir e^z para $z \in \mathbb{C}$ 54

Sea $z = x+iy$ Queremos que se cumpla

$e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ $\quad e^{iy} = \cos(y) + i\,\text{sen}(y)$

Definimos e^z para $z = x+iy$ como:

$e^z = e^x\left[\cos(y) + i\,\text{sen}(y)\right]$

$e^{2+3i} = e^2\left[\cos(3) + i\,\text{sen}(3)\right]$

$e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi)$

$e^{\pi i} = -1 + i(0) = -1$

$\boxed{e^{\pi i} = -1}$

$e^{i\pi} + 1 = 0$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(25) $1 + \sqrt{3}\,i$

La forma exponencial es $re^{i\theta}$

Así que buscaremos el r y el θ, es decir el radio que es el módulo y el ángulo

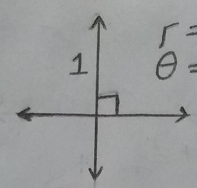
$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \Rightarrow r = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$ (está en el 1er cuadrante)

$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(b) $z = i$

$\Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2}}$



$r = 1$
$\theta = \pi/2$

(a) $z = -2 + 2i$

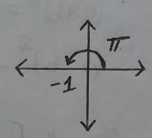
$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \Rightarrow \boxed{r = 2\sqrt{2}}$

$\theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4}$

$\boxed{\theta = \frac{3\pi}{4}}$

$\boxed{z = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}}$

(c) $z = -1$



$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$r = 1$

$z = e^{i\pi}$

(b) $(-3 + i\sqrt{3})^4 = (-3)^3 + 3(-3)^2(i\sqrt{3}) + 3(-3)(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3$

$(-\cancel{27}) + 27i\sqrt{3} - 9.\cancel{(-3)} + i^3\sqrt{3}^3 + (-i)3\sqrt{3}$

$= 27i\sqrt{3}$

$= 27\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i = (24\sqrt{3}i).(-3 + i\sqrt{3})$

$= -72\sqrt{3}i + 72i^2 = -72 - 72\sqrt{3}i$

Amb. posee el mismo grado.

54

55

$$r = \sqrt{(-72)^2 + (-72\sqrt{3})^2}$$

$$r = \sqrt{5184 + 15552} \Rightarrow \boxed{r = 144}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-72\sqrt{3}}{-72}\right) = 60^\circ$$

$$\boxed{z = 144\, e^{i\frac{4}{3}\pi}}$$

$$\theta = 60^\circ + 180^\circ = 240^\circ = \frac{4}{3}\pi$$

(ya q ambos son negativos)

$$1,\hat{3}3 = \frac{240}{180}$$

$$\begin{array}{r|l} 240 & 180 \\ -180 & \\ \hline 600 & \\ -540 & \\ \hline 600 & \\ -540 & \\ \hline 60 & \end{array}$$

ⓒ $(5-5i)^{-6} = \dfrac{1}{(5-5i)^6}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(5-5i)^3\,(5-5i)^3}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= \frac{1}{[5^3 + 3\cdot 5^2(-5i) + 3\cdot 5\cdot(-5i)^2 + (-5i)^3]\,2}$$

$$i^3 = (i)^2 \cdot i = -i$$

$$= \frac{1}{(125 - 375i - 375 + 125i)^2}$$

Como b es negativo:

$$= \frac{1}{(-250 - 250i)^2}$$

tenés q sacar el i de abajo

$$= \frac{1}{125.000}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{39500^2 + (-200000)^2}}$$

$$r = \frac{1}{203863,3121} \times$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{200000}{39500}\right)$$

$$360^\circ - \operatorname{arctg}\left(\frac{200000}{39500}\right)$$

$$\theta = 281,17^\circ \times$$

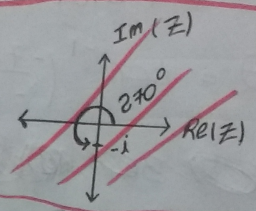
$$\boxed{\theta = 1,56\,\pi}$$

Mal

$$\frac{1}{203863{,}3}\, e^{i\,1{,}57\pi}$$

NOP

$$\frac{1}{(5-5i)^6} = -\frac{i}{125000}$$

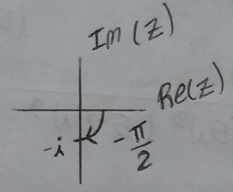


$$r = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{125000}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\theta = 270^\circ \Rightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$r = \frac{1}{125000} \qquad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{125000}\, e^{-\frac{i\pi}{2}}$$



(25) ~~Expresar en términos~~

Utilizando la forma exponencial de un complejo, calcular el $\ln(i)$.

Por definición el $\ln(i)$ debería ser algún nro. complejo z tal que $e^z = i$. Pero sabemos por la fórmula Euler que:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

Lnb. posee el mismo grado.

Así que podemos decir que 56

$$\ln i = i.\frac{\pi}{2} \quad \ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) + 2\pi n i \quad : n \in \mathbb{Z}$$

Esto es cierto si elegimos ln como la rama principal del logaritmo complejo.

Pero ~~asegurate~~ tené en cuenta que la función exponencial es periódica, y que:

$e^{i\pi/2 + 2\pi i k} = i$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto el logaritmo es una función multivaluada.

27. Resolver las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$.

ⓐ $\mathrm{sen}(z) = 4 \Rightarrow$

$$\mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 4 \Rightarrow$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 8i \Rightarrow \boxed{u = e^{iz}} \Rightarrow u + u^{-1} = 8i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(u + u^{-1}) = 8iu \Rightarrow u^2 + 1 = 8iu \Rightarrow u^2 - 8iu + 1 = 0$$

$$\mathrm{sen}\, z = \mathrm{sen}(x + iy) = \mathrm{sen}\, x . \cos iy + \cos x . \mathrm{sen}\, iy$$

$$= \mathrm{sen}\, x . \cosh y + i \cos x . \mathrm{senh}\, y$$

$$u^2 - 8iu + 1 = 0$$

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{8i \pm \sqrt{(-8i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{8i \pm \sqrt{-64 - 4}}{2}$$

$$\frac{8i \pm \sqrt{-68}}{2} = \frac{8i \pm 2\sqrt{17}\,i}{2} = 4i \pm \sqrt{17}\,i$$

$$x_1 = 4i + \sqrt{17}\,i$$

$$x_2 = 4i - \sqrt{17}\,i$$

$$e^{iz} = 4i + \sqrt{17}\,i$$

$$\ln(e^{iz}) = \ln(4i + \sqrt{17}\,i)$$

$$\ln(z) = \ln|z| + i \cdot \operatorname{Arg}(z) + 2\pi n i$$

$$iz = \ln(4i + \sqrt{17}\,i)$$

$$z = \frac{\ln(4i + \sqrt{17}\,i)}{i} + 2\pi n$$

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1}$$

$$z = \frac{1}{i} \ln(4i - \sqrt{17}\,i) + 2\pi n$$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= -i \ln(4i + \sqrt{17}\,i) + 2\pi n \\ z &= -i \ln(4i - \sqrt{17}\,i) + 2\pi n \end{aligned}}$$

57

⑥ $4\,\text{sen}(z) = 3i$

$$4\,\text{sen}(z) = 4\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = 3i$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{3}{4}i \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = \frac{3}{2}i^2$$

Tomamos $\boxed{u = e^{iz}}$

$$u - u^{-1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow u\left[u - u^{-1}\right] = -\frac{3}{2}u$$

$$\Rightarrow u^2 - 1 + \frac{3}{2}u = 0 \Rightarrow u^2 + \frac{3}{2}u - 1 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a} \qquad \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(+\frac{3}{2}\right)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$

$$\frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

$$e^{iz} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \Rightarrow \ln e^{iz} = \ln\left(\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}\right)$$

$$iz = \ln\left(\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}\right) \Rightarrow \boxed{z_1 = -i\ln(2) + 2\pi n}$$

$$z_2 = -i\ln\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$$

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow i\pi = \ln(-1)$$

$$\frac{e^{i\pi}}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \ln\left(\frac{e^{i\pi}}{2}\right) = \ln\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ln e^{i\pi} - \ln 2 = \ln\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow i\pi - \ln 2 = \ln(-1/2)$$

$$\therefore z_2 = -i(i\pi - \ln 2) + 2\pi n$$

$$\boxed{z_2 = \pi + i\ln 2 + 2\pi n}$$

(28) La suma de dos nros. complejos es $3+2i$, el cociente es un nro. imaginario puro y la parte real de uno de ellos es 2. Hallar dichos nros. complejos.

$$(2+bi) + (c+di) = 3+2i$$

$$\frac{2+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{2c - di2 + bic + bd}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{2c + bd + (bc - d2)i}{c^2+d^2} = \frac{2c+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-d2)i}{c^2+d^2}$$

57

58

Por lo tanto

$$\begin{cases} 2+c = 3 \Rightarrow \boxed{c=1} \\ b+d = 2 \\ \dfrac{2c+bd}{c^2+d^2} = 0 \Rightarrow 2+bd=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{-2}{d}} \\ \dfrac{(bc-2d)}{c^2+d^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{b.1-2d}{1+d^2} = 1 \end{cases}$$

Como $b+d=2 \Leftrightarrow \frac{-2}{d}+d=2 \Leftrightarrow \frac{-2+d^2}{d}=2$

$\Rightarrow -2+d^2 = 2d \Rightarrow d^2-2d-2=0$

$$\frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2-4.1.(-2)}}{2.1} \begin{cases} d_1 = 1+\sqrt{3} \\ d_2 = 1-\sqrt{3} \end{cases}$$

$\underline{z = a+bi}$

$z = 2 + \left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}}\right)i$

$z = \left(2 + \left(\frac{-2}{1-\sqrt{3}}\right)\right)$

$\underline{w = c+di}$

$w = 1 + (1+\sqrt{3})$

$w = 1 + (1-\sqrt{3})$

tmb. posee el mismo grado.

57

58

Por lo tanto

$$\begin{cases} 2+c = 3 \Rightarrow \boxed{c=1} \\ b+d = 2 \\ \dfrac{2c+bd}{c^2+d^2} = 0 \Rightarrow 2+bd=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{-2}{d}} \\ \dfrac{(bc-2d)}{c^2+d^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{b.1-2d}{1+d^2} = 1 \end{cases}$$

Como $b+d=2 \Leftrightarrow \frac{-2}{d}+d=2 \Leftrightarrow \frac{-2+d^2}{d}=2$

$\Rightarrow -2+d^2=2d \Rightarrow d^2-2d-2=0$

$$\frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2-4.1.(-2)}}{2.1} \begin{cases} d_1 = 1+\sqrt{3} \\ d_2 = 1-\sqrt{3} \end{cases}$$

$\underline{z = a+bi}$

$z = 2 + \left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}}\right)i$

$z = \left(2 + \frac{-2}{1-\sqrt{3}}\right)$

$\underline{w = c+di}$

$w = 1 + (1+\sqrt{3})$

$w = 1 + (1-\sqrt{3})$

Amb. posee el mismo grado.

La suma de dos nros. complejos es $3+i$ y la parte real de uno de ellos es 2. Determine dichos nros. sabiendo que su cociente es imaginario puro.

La parte real de uno de ellos es 2 por ejemplo $a=2$.

$$(2+bi)+(c+di)=3+i$$

luego $c=1$, $b+d=1$

Por otro lado al ser su cociente un nro imaginario puro la parte real debe ser cero.

$$\frac{2+bi}{1+di}=\frac{(2+bi)(1-di)}{1+d^2}=\frac{2-2di+bi+bd}{1+d^2}=\frac{2+bd}{1+d^2}$$

$$+\frac{b-2d}{1+d^2}i$$

$$Re\left(\frac{2+di}{1+di}\right)=\frac{2+bd}{1+d^2}=0 \Rightarrow b=-\frac{2}{d}$$

como $b+d=1$

$$-\frac{2}{d}+d=1 \Rightarrow d^2-d-2=0 \Rightarrow d=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$

$$d_1=2 \quad y \quad d_2=-1$$

Emb. posee el mismo grado.

$(x-2)^2$.

$\therefore \begin{cases} Z = 2-i \\ Z = 2+2i \end{cases}$ $\quad W=c+di \Rightarrow \begin{cases} W = 1+2i \\ W = 1-i \end{cases}$ 59

$Z = a+bi \Rightarrow$

(29) Analizar e indicar, donde está el error

$$-1 = i^2 = i.i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

esto no vale para nros. negativos.

Teo. de Gauss, Ruffini Resto, Fórmula resolvente

Trabajo Práctico Nº3

1) Sea el anillo $A = \mathbb{Z}$ y sean $p = (2,1,0,0,\dots)$ y $q = (3,1,0,0,\dots)$ definidos en dicho anillo. Calcular y determinar el grado de cada polinomio resultante:

(a) $p+q = \overbrace{(2,1,0,0,\dots)}^{= 2+x \text{ coeficientes}} + \overbrace{(3,1,0,0,\dots)}^{3+x}$

$= (5,2,0,0,\dots) = 5+2x$

(b) $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

El grado de p y q es 1. La suma tmb. posee el mismo grado.

ⓑ $p - q = (2,1,0,0,\dots) - (3,1,0,0,\dots)$ $\quad 2 + \cancel{x} + (-3 - \cancel{x}) =$

$= -1x^0$ el grado es 0

ⓒ $p \cdot q = \underbrace{(2,1,0,0\dots)}_{=2+x} \cdot \underbrace{(3,1,0,0,\dots)}_{=3+x} =$

$(2+x)(3+x) = 6 + 2x + 3x + x^2 = x^2 + 5x + 6$

Por lo tanto el polinomio es de 2do grado.

ⓓ $2p + 3q = (4,2,0,0,\dots) + (9,3,0,0,\dots) =$

$4 + 2x + 9 + 3x = 13 + 5x$ (Grado 1)

ⓔ $(2,1,0,0,\dots)^2 = (2+x)(2+x) = 2^2 + 2.2x + x^2$

$= x^2 + 4x + 4$ (grado 3) ⓕ $(3+x)^3 = 3^3 + 3.3^2.x + 3.3.x^2 + x^3$ (Grado 3)

② Sean $p = (a_0, a_1, 0, 0, \dots)$ y $q = (b_0, b_1, 0, 0, \dots)$:

ⓐ Indique el grado de cada uno.

$p = a_0 + a_1 x$ $\qquad$ $q = b_0 + b_1 x$

(Grado 1) $\qquad$ (Grado 1)

ⓑ Halle $p+q$ y $p \cdot q$ y sus respectivos grados. 60

$$p+q = a_0 + a_1 X + b_0 + b_1 X =$$
$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X$$

$$p \cdot q = (a_0 + a_1 X) * (b_0 + b_1 X) =$$
$$= a_0 b_0 + a_0 b_1 X + a_1 X b_0 + a_1 X b_1 X$$
$$= a_0 b_0 + [a_0 b_1 + a_1 b_0] X + a_1 b_1 X^2$$

Por lo tanto posee grado 2.

③ Si $p = (1, -K, -K, 0, 0, \ldots)$ y $q = (-1, K, 3, 2K, 0, 0, \ldots)$ son polinomios definidos en $\mathbb{Z}$, hallar los valores que debe tomar K tal que

$$(p \cdot q)_1 - (p \cdot q)_3 = 4.$$

$$(1, -K, -K, 0, 0, \ldots) * (-1, K, 3, 2K, 0, 0, \ldots) =$$
$$1(-1, K, 3, 2K, 0, 0, \ldots) - K(-1, K, 3, 2K, 0, 0, \ldots) +$$
$$-K(-1, K, 3, 2K, 0, 0, \ldots) = (-1 + K + K, K - K^2 - K^2, 3 - 3K$$
$$-3K, 2K - 2K^2 - 2K^2, 0, 0, \ldots)$$
$$= (-1 + 2K, K, 3 - 6K, 2K - 4K^2, 0, 0, \ldots)$$
$$K - 2K - K^2 = 4$$

$$(-1+K)x^0 + Kx + (3-6K)x^2 + (2K-K^2)x^3$$

$$(p\cdot q)_1 = (-1+K)1^0 + K\cdot 1 + (3-6K)1^2 + (2K-K^2)\cdot 1^3$$

$$= (-1+K) + K + 3 - 6K + 2K - K^2$$

$$= -2 - 2K - K^2$$

$$(p\cdot q)_3 = (-1+K) + 3K + (3-6K)3^2 + (2K-K^2)3^3$$

$$= -1 + K + 3K + 27 - 54K + 54K - 27K^2$$

$$= 26 + 4K - 27K^2$$

$$(-2-2K-K^2) - (26+4K-27K^2) = 4$$

$$-28 - 6K + 26K^2 = 4$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4.a.c}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4.(-28)(+26)}}{2.(+26)}$$

$$\boxed{K = -1}$$

$$\boxed{K = \frac{16}{13}}$$

Mal

Hecho en pág. 63.

4) Calcular $m \in \mathbb{R}$ para q. el polinomio $P(x) = (m^2-1)x^3 + (m+1)x^2 - x + 4$ sea: ⓐ de 3er grado ⓑ de 2do grado ⓒ de 1er grado

61

ⓐ Para que sea de 3er grado basta con que $m^2 - 1 = 1 \Rightarrow m^2 = 2$

$\Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$

ⓑ Para que sea de 2do grado

$m^2 - 1 = 0$ y $m + 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{m \neq -1}$

$m^2 = 1 \Rightarrow \boxed{m = 1}$

ⓒ Para que sea de 1er grado:

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \\ m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto $\boxed{m = -1}$

⑤ Determine los valores reales de a y b para que el polinomio $x^3 + 6x^2 + ax + b$ sea un cubo perfecto. Cubo perfecto: $(A+B)^3$

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$x^3 + 6x^2 + ax + b$

tor 7

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$(x+\alpha) = x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3$

$$\begin{cases} x^3 = x^3 \\ 3x^2\alpha = 6x^2 \\ 3x\alpha^2 = ax \\ \alpha^3 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 6 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \\ 3\alpha^2 = a \Rightarrow 3 \cdot 2^2 = a \\ \alpha^3 = b \Rightarrow 2^3 = b \Rightarrow \boxed{b = 8} \\ a = 12 \end{cases}$$

Luego para que sea un cubo perfecto $a = 12$, $\alpha = 2$ y $b = 8$

$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Verificación:

$x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

6. Si el polinomio $P(x) = x^3 + mx^2 - 1$ es divisible por $x^2 + x - 1$. ¿Cuál es el valor de m?

62

Los valores de m y n para que el polinomio sea di-visible son: $m = 0$; $n = -7$

Los valores de m y n para que el polinomio sea divisible se calcula mediante la aplicación del teo del resto de la siguiente manera $m = ?$ $n = ?$

$P(x) = x^3 + mx^2 + nx + 6$ divisible por $(x+3)$ y $(x-2)$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ (para que sea divisible por $P(x)$)

$(-3)^3 + m(-3)^2 + n(-3) + 6$

$-27 + 9m - 3n + 6 = 0$ (el resto debe ser 0 para que sea divisible)

$9m - 3n = 21$

$\frac{1}{3}(9m - 3n) = \frac{1}{3} \cdot 21 \Rightarrow 3m - n = 7$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = +2 \Rightarrow (+2)^3 + m(+2)^2 + n(+2) + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 + 4m - 2n = 0 \Rightarrow 8 + 4m + 2n + 6 = 0$

$4m + 2n = -14$

$2m + n = -7$

Luego $3m - \cancel{n} = 7$

$+ \; 2m + \cancel{n} = -7$

$\boxed{m = 0}$

$\boxed{n = -7}$

③ Si $p = (1, -K, -K, 0, 0, \ldots)$ y $q = (-1, K, 3, 2K, 0, 0, \ldots)$ son polinomios fact definidos en $\mathbb{Z}$, hallar los valores que debe tomar K tal que $(p \cdot q)_1 - (p \cdot q)_3 = 4$

$(p \cdot q)_1$ se refiere al coeficiente del término x y $(p \cdot q)_3$ se refiere al coeficiente del termino x^3.

Para $(p \cdot q)_1$ tenemos:

$$p(x)q(x) = p_0 q_0 + \overbrace{(p_0 q_1 + p_1 q_0)}^{(p \cdot q)_1} x + (p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0) x^2 + (p_0 q_3 + p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_3 q_0) x^3 + (p_0 q_4 + p_1 q_3 + p_2 q_2 + p_3 q_1 + p_4 q_0) x^4 + \ldots + (p_0 q_{n+m} + p_1 q_{n+m-1} + p_2 q_{n+m-2} + p_{n+m-1} q_1 + p_{n+m} q_0) x^{n+m}$$

$$(1 - Kx - Kx^2)(-1 + Kx + 3x^2 + 2Kx^3)$$

$$-Kx - Kx = -2Kx$$

$$(1 \cdot K + (-K) \cdot (-1)) = 2K = p_0 q_1 + p_1 q_0$$

$$p_0 q_3 + p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_3 q_0 = -3K^2$$

62

Finalmente tenemos $2k-(-3k)^2=4$ 63

$\Rightarrow 2k+3k^2-4=0 \Rightarrow 3k^2+2k-4=0$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a} \qquad \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.3.(-4)}}{2.3}$$

$$\frac{-2\pm\sqrt{4+48}}{2.3} \quad k_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{3} \quad k_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$$

7) Halle el valor de m y n para que el polinomio $P(x)=2x^4-x^3+mx^2-nx+2$, sea divisible por $Q(x)=x^2-x-2$.

$$Q(x)=x^2-x-2=0 \longrightarrow \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4.1.(-2)}}{2.1}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \quad x_1=2 \quad x_2=-1$$

$$\begin{cases} P(2)=2(2)^4-(2)^3+m(2)^2-n.2+2=0 \\ P(-1)=2(-1)^4-(-1)^3+m(-1)^2-n(-1)+ \\ +2=0 \end{cases}$$

$P(2)=32-8+4m-2n+2=0 \Rightarrow 26+4m-2n=0 \Rightarrow$ (*)

$P(-1)=2+1+m+n+2=0 \Rightarrow 5+m+n=0$

$$\Rightarrow P(2)=13+2m-n=0$$
$$+\ P(-1)=5+m+n=0$$
$$18+3m=0 \Rightarrow m=-\frac{18}{3} \Rightarrow \boxed{m=-6}$$

$P(-1)=5+(-6)+n=0 \Rightarrow \boxed{n=1}$

62

Finalmente tenemos $2k-(-3k^2)=4$ 63

$\Rightarrow 2k+3k^2-4=0 \Rightarrow 3k^2+2k-4=0$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a} \qquad \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.3.(-4)}}{2.3}$$

$$\frac{-2\pm\sqrt{4+48}}{2.3} \quad k_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{3} \quad k_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$$

7) Halle el valor de m y n para que el polinomio $P(x)=2x^4-x^3+mx^2-nx+2$, sea divisible por $Q(x)=x^2-x-2$.

$$Q(x)=x^2-x-2=0 \longrightarrow \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4.1.(-2)}}{2.1}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \quad x_1=2 \quad x_2=-1$$

$$\begin{cases} P(2)=2(2)^4-(2)^3+m(2)^2-n.2+2=0 \\ P(-1)=2(-1)^4-(-1)^3+m(-1)^2-n(-1)+ \\ +2=0 \end{cases}$$

$P(2)=32-8+4m-2n+2=0 \Rightarrow 26+4m-2n=0 \Rightarrow$ (*)

$P(-1)=2+1+m+n+2=0 \Rightarrow 5+m+n=0$

$$\Rightarrow P(2)=13+2m-n=0$$
$$+\,P(-1)=5+m+n=0$$
$$18+3m=0 \Rightarrow m=-\frac{18}{3} \Rightarrow \boxed{m=-6}$$

$P(-1)=5+(-6)+n=0 \Rightarrow \boxed{n=1}$

73

8) Halle $d(x) = mcd(p(x), q(x))$ si

a. $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$ y $q(x) = x^2 + 1$

$(x-i).(x+i)$

<u>Máximo</u> <u>común</u> <u>divisor</u>: factores comunes elevados al menor exponente.

<u>Mínimo</u> <u>común</u> <u>multiplo</u>: todos los factores elevados al mayor exponente.

$P(x) = x^5 + 3x^4 - 4x^2$

$Q(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^2 - x$

1

Factorizar los polinomios:

$P(x) = \boxed{x^2}(x-1).(x+2)^2$

$Q(x) = \boxed{x}(x+1).(x-1)^3$ tomamos los menores exponentes.

$\underbrace{MCD}_{\text{máximo común divisor}} = x.(x-1) = x^2 - x$

$mcm = x^2.(x-1)^3(x+2)^2(x+1)$

⑧ Halle $d(x) = mcd(p(x), q(x))$ si: 64.

ⓐ $p(x) = x^3 + 2x^2 + x \qquad q(x) = x^2 + 1$

1ero factorizamos

$p(x) = x^3 + 2x^2 + x = 0 \qquad q(x) = x^2 + 1$

Ruffini

	1	2	1	0
0		0	0	0
	1	2	1	$\boxed{0}$

$(x+i).(x-i)$

$(-i)^2 + 1 = 0$

$i^2 + 1 = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.1}}{2}$ $x_1 = -1$, $x_2 = -1$

Factorizado:

$p(x) = x.(x+1)^2$

$q(x) = (x-i)(x+i)$

MCD = 1 (Porque no tienen nada en común?)

ⓑ $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

$q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

Encuentra todos los factores lineales de $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ a través del teo. de la raíz racional.

Los candidatos son $x = \pm \frac{p}{q}$ $\forall p$ que sea divisor del término constante -3 y todo lo que sea divisor del coeficiente mayor grado.

Ejemplo: $f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 11x + 10$

$q = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ $\quad p = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

$$\frac{p}{q} = \left\{\pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{5}{4}, \pm \frac{5}{2}, \pm 5, \pm 10\right\}$$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Ruffini

	4	-16	11	10
$\frac{1}{2}$		2	-9	10
	4	-18	20	$\boxed{0}$

Factorización

$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 2)$

$4x^2 - 18x + 20$

$$\frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4.4.20}}{2.4} = \frac{18 \pm 2}{8}$$

$x_1 = \frac{5}{2}$ $\quad x_2 = 2$

b. $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ 65

$q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ 3

$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

$q = \{\pm 1\}$ $\quad p = \{\pm 1\}$

$\frac{p}{q} = \{\pm 1\}$ $\quad P(-1) = P(1) \neq 0 \Rightarrow$ posee soluciones imaginarias.

$i^4 + i^3 + 2.i^2 + i + 1 = 1 - i - 2 + i + 1 = 0$ ✓

$(-i)^4 + (-i)^3 + 2(-i)^2 - i + 1 = 1 + i - 2 - i + 1 = 0$ ✓

Intento fallido:

$x^2(x^2 + x + 2) + 1(x+1)$

$(x^2+1)(x^2+x+2)$

casi debería ser $+1$

Ruffini

	1	1	2	1	1
signo cambiado i		i	$i+1$	$i+1$	-1
	1	$1-i$	$1-i$	i	$\boxed{0}$

$x^3 + (1-i)x^2 + (1-i)x + i$

	1	$1-i$	$1-i$	i
$-i$		$-i$	$-i$	$-i$
	1	1	1	$\boxed{0}$

$x^2 + x + 1 \Rightarrow (x-i)(x+i)(x^2+x+1)$

b. $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ 65

$q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ 3

$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

$q = \{\pm 1\}$ $p = \{\pm 1\}$

$\frac{p}{q} = \{\pm 1\}$ $P(-1) = P(1) \neq 0 \Rightarrow$ posee soluciones imaginarias.

$i^4 + i^3 + 2.i^2 + i + 1 = 1 - i - 2 + i + 1 = 0$ ✓

$(-i)^4 + (-i)^3 + 2(-i)^2 - i + 1 = 1 + i - 2 - i + 1 = 0$ ✓

Intento fallido:

$x^2(x^2 + x + 2) + 1(x+1)$

$(x^2+1)(x^2+x+2)$

casi debería ser $+1$

Ruffini

	1	1	2	1	1
signo cambiado i		i	$i+1$	$i+1$	-1
	1	$1-i$	$1-i$	i	$\boxed{0}$

$x^3 + (1-i)x^2 + (1-i)x + i$

	1	$1-i$	$1-i$	i
$-i$		$-i$	$-i$	$-i$
	1	1	1	$\boxed{0}$

$x^2 + x + 1 \Rightarrow (x-i)(x+i)(x^2+x+1)$

$q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

$q = \{\pm 1\}$ $\quad p = \{\pm 3, \pm 1\}$ factc

$\frac{p}{q} = \{\pm 3, \pm 1\}$

	1	-2	-2	-3
-3		-3	-3	-3
	1	1	1	$\boxed{0}$

$x^2 + x + 1$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1.1}}{2}$

$\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ $\quad x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, $\quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

$\boxed{(x+3)\left(x - \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right]\right)\left(x - \left[-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right]\right)}$

$= (x+3)(x^2 + x + 1)$

$MCD = x^2 + x + 1$

Obtenga tmb. dos polinomios $u(x)$ y $v(x)$ tales que: $d(x) = u(x)\,p(x) + v(x)\,q(x)$

ⓐ $d(x) = 1 \Rightarrow$

$1 = u(x)\overbrace{\left(x \cdot (x+1)^2\right)}^{p(x)} + v(x)\overbrace{\left[(x-i)(x+i)\right]}^{q(x)}$

$1 = u(x)\left(x \cdot (x+1)^2\right) + v(x) \cdot \left[(x^2+1)\right]$

$\frac{1}{2\left[x(x+1)^2\right]}\left[x \cdot (x+1)^2\right] + \frac{1}{2\left[x^2+1\right]}(x^2+1) = 1$

$u(x) = \frac{1}{2p(x)}$ y $v(x) = \frac{1}{2q(x)}$

66

(b) $d(x) = x^2 + x + 1$

$x^2 + x + 1 = u(x)[(x+i)(x-i)(x^2+x+1)] + v(x)(x+3) \cdot (x^2+x+1)$

$u(x) = \dfrac{1}{[(x+i)(x-i)]}$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x^2+x+1)}$

ó $u(x) = \dfrac{1}{(x+i)(x-i)(x^2+x+1)}$ y $v = \dfrac{1}{(x+3)}$

o sea $u(x) = \dfrac{1}{(x+i)(x-i)}$ y $v(x) = \dfrac{1}{q(x)}$

ó $u(x) = p(x)$ y $v(x) = \dfrac{1}{x+3}$???

9) Pruebe que los polinomios $P(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$ son coprimos

$P(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$

Posibles raíces: $q = \{\pm 1\}$ $p = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$

$p/q = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$

$P(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 - 4(-2) - 16 = 0$

Ruffini

	1	4	-4	-16
2		2	4	-16
	1	2	-8	$\boxed{0}$

$(x-2).(x^2+2x-8)$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4.1(-8)}}{2} \rightarrow \boxed{x_1 = 2} \quad \boxed{x_2 = -4}$$

$p(x) = (x-2)(x-2)(x-4) = (x-2)^2(x-4) = p(x)$

$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x$

$Q(x) = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$

$$\frac{2 \pm \sqrt{2^2-4.1.1}}{2} \rightarrow \boxed{x_1 = 1} \quad \boxed{x_2 = 1}$$

∴ Son coprimos porq. no poseen ningún término en común.

10) Pruebe si $(x-1)^2$ es el máximo común divisor de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ y $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.

67

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ $\quad P(1) = 1^3 - 2.1^2 + 1 = 0$

	1	-2	0	1
-1		-1	1	1
	1	-1	-1	$\boxed{0}$

$(x+1)(x^2 - x - 1)$

$Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1)$

No, el máximo común divisor de $P(x)$ y $Q(x)$ es $(x^2 - x + 1)$.

11) Si $P(x)$ es un polinomio tal que $2.P(x) + x^2.P(x-1) = x^2 + 2x + 2$, calcule $P(1)$.

$P(1) = 2P(1) + 1P(1-1) = 1 + 2.1 + 2$

$P(1) = 2P(1) + 1P(0) = 5 \Rightarrow P(0) = 5 - 2P(1)$

$P(0) = 2P(0) + \cancel{0^2.P(0-1)} = 0^2 + 2.0 + 2$

$\Rightarrow 2P(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P(0) = 1}$

$P(0) = 5 - 2P(1) \Rightarrow 1 = 5 - 2P(1)$ factor

$\Rightarrow -\frac{4}{2} = -P(1) \Rightarrow \boxed{2 = P(1)}$

(12) Sea el polinomio $P(x) = (x^{n-1} + 2x^{n-2} + n)^n$. Si 2^n veces su término independiente es igual a la suma de sus coeficientes calcular el valor de n.

$P(1) = (1^{n-1} + 2.1^{n-2} + n)^n = (n+3)^n$

$\Rightarrow 2^n \cdot n^n = (n+3)^n$

Para $n = 3$ se cumple la igualdad

$2^3 \cdot 3^3 = (3+3)^3$

$216 = 216$

$\therefore$ El valor de $n = 3$.

13 Un polinomio $P(x)$ cuando se divide por el polinomio $Q(x) = x^2 - 4$, deja resto $R(x) = 3x+5$ Calcular $P(-2)$.

68

Teorema del resto:

$P(-2) = R(-2) = 3.(-2)+5 = -1$

14 Si $P(x+5) = x^2 - 3x + 1$, calcular $P(8) + P(6)$

$P(0+5) = 1 = 0^2 - 3.0 + 1$.

$P(3+5) = 3^2 - 3.3 + 1 = \cancel{9} - \cancel{9} + 1 = 1$

$P(1+5) = 1^2 - 3.1 + 1 = -1$

Luego $P(8) + P(6) = 0$

15 Siendo $P(x^n + 1) = x - 1$, hallar n sabiendo que $P(3) = -\frac{7}{8}$

Reemplazando $x = 3$

$P(3^n + 1) = 3 - 1 = 2$

Igualando $P(3) = -\frac{7}{8}$

factor

$2 = -\frac{7}{8}$

Por lo tanto, el valor de "n" que satisface la ec. $P(x^n+1) = x-1$ y $P(3) = -\frac{7}{8}$ es $n = 2$.

(16) Si el resto de la división del polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 - Kx - 75$ por $(x-5)$ es 10, encuentre el valor de K.

Teo. del resto: $\frac{x^4 - 4x^3 - Kx - 75}{x-5} = 10$

Entonces $P(5) = 10$.

$P(5) = 5^4 - 4.5^3 - K.5 - 75 = 10$

$-5K + 50 = 10 \Rightarrow \boxed{K = 8}$

(17) El polinomio $P(x)=x^n+(-4x^3)+2x+K$ es divisible por $(x+2)$. Si $P(1)=3$, halle el valor de K y el grado de $P(x)$.

69

$$P(x)=\frac{x^n-4x^3+2x+K}{x+2}=0$$

Entonces $P(2)=0$.

Sabemos $P(1)=3$.

$P(2)=2^n-4.2^3+2.2+K=2^n-28+K=0$

$P(1)=1^n-4.1^3+2.1+K=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-4+2+K=3 \Rightarrow -1+K=3 \Rightarrow \boxed{K=4}$

El grado de $P(x)$ es n.

18) Determine K de modo que al dividir $P(x) = 2x^{15} - Kx^{13} + 5x^8 + 2Kx^4 - 6$ por $S(x) = x+1$ el resto sea igual a 2.

$$P(-1) = 2(-1)^{15} - K(-1)^{13} + 5(-1)^8 + 2K(-1)^4 - 6 = 2$$
$$= 2(-1) + K + 5 + 2K - 6 = 2$$
$$= 3K - 3 = 2 \Rightarrow \boxed{K = \frac{5}{3}}$$

Explicación: Por el teo. del resto, el resto de la division de un polinomio $P(x)$ entre $(x-a)$ es igual a $P(a)$. En este caso tenemos $(x-(-1))$ es decir $P(-1)$.

19. Al dividir un polinomio $P(x)$ por $(x-1)$ da resto 2 y al dividirlo por $(x-2)$ da resto 1. ¿Cuál es el resto de la división de $P(x)$ por el producto $(x-1)(x-2)$?

$P(1) = 2$ $\quad P(2) = 1$ $\quad r(x) = ax+b$

73

70

$P(2) = r(2) = a.2+b = 1$

$P(1) = r(1) = a+b = 2 \Rightarrow a = 2-b$

$2[2-b]+b = 1 \Rightarrow 4-2b+b = 1$

$4-b = 1 \Rightarrow -b = 1-4 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$a = 2-3 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$r(x) = -x+3$ ese es el resto de dividir $P(x)$ por $(x-1)(x-2)$.

20. Si el residuo de dividir el polinomio $P(x) = ax^5+bx^3+cx-8$, entre $(x+3)$ es 6; determine el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x-3)$.

$P(x) = r(x) = ax+b$

$P(-3) = r(-3) = -3a+b = 6$

$P(0) = r(0) = a.0+b = -8$

$P(0) = a.0^5+b.0^3+c.0-8 = -8$

$\begin{cases} -3a+b = 6 \Rightarrow -3a+(-8) = 6 \Rightarrow -3a = 14 \\ a.0+b = -8 \Rightarrow \boxed{b=-8} \end{cases}$

$a = \frac{14}{-3}$

Luego $\boxed{r(x) = -\frac{14}{3}x - 8}$ factor 7

$r(3) = -\frac{14}{3} \cdot 3 - 8 = -22$

$P(3) = r(3) = -22 = \frac{P(x)}{x-3}$

21) En $\mathbb{R}[x]$ hallar el resto de la división de $p(x) = x^{1237} - 1$ entre $q(x) = x^2 - 1$

$$\frac{x^{1237} - 1}{x^2 - 1} = \frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^{1237} - 1 = 0 \Rightarrow \\ x^{1237} = 1 \Rightarrow \\ x = \sqrt[1237]{1} \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^{1237} - 1 \text{ es equivalente a } x-1.$$

22) El polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$ en el que a y b son nros. reales, posee al número i como una de sus raíces. Calcular el producto $a \cdot b$.

71

$$P(i) = 0 = 2 \cdot i^3 - i^2 + ai + b$$
$$= -2i + 1 + ai + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1} \\ ai - 2i = 0 \Rightarrow (a-2)i = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \\ i \Rightarrow \boxed{a = 2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad a \cdot b = 2 \cdot (-1) = -2$$

23) Para cada una de los siguientes polinomios, determine sus raíces factor y la multiplicidad de cada una de ellos.

a) $P(x) = (x+3)^2(x-2)^3x$

$(x+3)^2(x-2)^3(x-0)^1$

Raíces	Multiplicidad
-3	2
2	3
0	1

b) $Q(x) = (x^2+3x+2)^2(x+2)$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4.1.2}}{2.1} = \frac{-3 \pm 1}{2} \quad x_1 = -2 \quad x_2 = -1$$

$$[(x+2)(x+1)]^2(x+2) = (x+2)(x+1)(x+2)(x+1)(x+2)$$

$$= (x+2)^3(x+1)^2$$

Raíces	Multiplicidad
-2	3
-1	2

c) $R(x) = (x^2+9)(x+3i)^2(x-3i)^2$ 72

$x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt[2]{-9} \Rightarrow x = \pm 3i$

$R(x) = (x+3i)(x-3i)(x+3i)^2(x-3i)^2$

$= (x+3i)^3(x-3i)^3$

Raíces	Multiplicidad
$3i$	3
$-3i$	3

d) $S(x) = x^3+x^2+x+1$

$S(-1) = (-1)^3+(-1)^2+(-1)+1$
$= -1+1-1+1 = 0$

signo cambiado

Ruffini

	1	1	1	1
1		1	0	1
	1	0	1	$\boxed{0}$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

$\Rightarrow x = \pm i$

$S(x) = (x+1)(x+i)(x-i)$

Raíces	Mult.
1	1
i	1
$-i$	1

24) En cada caso, demuestre si el 1er polinomio es un factor del 2do

ⓐ $P(x) = x-1$; $Q(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2$

Es factor si $Q(1) = 0$ $\quad x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$Q(1) = 4.1^3 + 3.1^2 - 5.1 - 2 = 0$

Por lo tanto $P(x)$ es un factor de $Q(x)$.

ⓑ $P(x) = x+2$; $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$P(x)$ es factor de $Q(x)$ si $Q(-2) = 0$.

$Q(-2) = (-2)^3 - 2.(-2)^2 - 5.(-2) + 6 = 0$

ⓒ $P(t) = t+2$; $Q(t) = 4t^4 - 2t^2 - 1$

$Q(-2) = 4(-2)^4 - 2(-2)^2 - 1 = 55 \neq 0$ (No es factor)

ⓓ $P(t) = 3t+1$; $Q(t) = 3t^4 + t^2 - 2t + 1$

$3t+1 = 0 \Rightarrow 3t = -1 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{3}}$

$Q\left(\frac{-1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^4 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \neq 0$

ⓔ $P(t) = 3t+1$; $Q(t) = 9t^4 + 6t^3 + 10t^2 + 6t + 1$

$P(t)$ es factor de $Q(t)$ si $Q\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

$Q(-1/3) = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^4 + 6\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 10\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 1$

$= (x-1)^2$

1° $\Rightarrow Q\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow P(t)$ es factor de $Q(x)$

73

25) Factorice $P(x)$

a) Si una raíz de $P(x) = x^3 - 5x^2 - 17x + 21$ es 17.

$P(7) = 7^3 - 5 \cdot 7^2 - 17 \cdot 7 + 21 = 0$

	1	-5	-17	21
-7		-7	-14	21
	1	2	-3	$\boxed{0}$

$$\begin{array}{r} -12 \\ \times 7 \\ \hline 84 \\ +17 \\ \hline 101 \\ \times 7 \\ \hline 707 \end{array}$$

$x^2 + 2x - 3x$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{array}$$

$P(x) = (x-7)(x-1)(x+3)$

(b) $P(-2) = 2.(-2)^4 - (-2)^3 - 8(-2)^2 + 4(-2) = 0$

Ruffini

	2	-1	-8	4	0
2		4	-10	4	0
	2	-5	2	0	$\boxed{0}$

$2x^3 - 5x^2 + 2x = 0$

	2	-5	2	0
-2		-4	2	0
	2	-1	0	$\boxed{0}$
$-\frac{1}{2}$		-1	0	
	2	0	$\boxed{0}$	

$2x^2 - x = 0$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.2.0}}{2.2} =$$

$$\frac{-1 \pm 1}{2.2} \quad \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{array}}$$

$P(x) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 4x =$

$(x+2)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) 2x$

c) Si $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ tiene a 1 como raíz de multiplicidad 3.

74

	1	-1	-2	2	1	-1
-1		-1	0	2	0	-1
	1	0	-2	0	1	$\boxed{0}$
-1		-1	-1	1	1	
	1	1	-1	-1	$\boxed{0}$	
-1		-1	-2	-1		
-1	1	2	1	$\boxed{0}$		
	1	1	1			
		1	$\boxed{0}$			

$$(x-1)^3 \, (x^2 + 2x + 1)$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$$

$$(x-1)^3 \, (x+1)^2 = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$$

d) Si una raíz de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 2x + 35$ es $2+i$.

Si vale $-2-i$ esa raíz también vale su conjugado $-2+i$

	1	2	-12	2	35
$-2-i$		$-2-i$	$-7-6i$	$16-7i$	35
	1	$4+i$	$-5+6i$	$-14+7i$	$\boxed{0}$
$-2+i$		$-2+i$	$-12+6i$	$-14+7i$	
	1	6	7	$\boxed{0}$	

$$x^2 + 6x + 7 = 0$$

$P(x)$ se puede escribir como

$$(x^2-4x+5)(x^2+6x+7)=0$$

83

Soluciones reales

$x_1 = -3-\sqrt{2}$

$x_2 = \sqrt{2}-3$

Averiguar como buscar raíces

$$(x-(-3-\sqrt{2}))(x-(-\sqrt{2}-3))(x-(2+i))(x-(2-i))$$

TODO Verificá si es $x-$(raíz) ó $x+$ (raíz)

(26) El polinomio $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ coeficientes reales y admite a 1 y $1+i$ como raíces. ¿Cuánto vale b?

$$P(1) = 1^3+a.1^2+b.1+c = 0$$

$$P(1+i) = (1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c=0$$

$$P(1-i) = (1-i)^3+a(1-i)^2+b(1-i)+c=0$$

Luego por el teo. fundamental del álgebra sabemos $P(x)$ tiene 3 raíces.

$$P(x) = (x-1)(x-(1+i))(x-(1-i))$$

75

$$P(x) = (x-1)(x-1+i)(x-1-i)$$

$$P(x) = (x^2 - x + xi - x + 1 - i)(x-1-i)$$

$$P(x) = (x^2 - 2x + (x-1)i + 1)(x-1-i)$$

$$P(x) = (x^3 - x^2 - x^2 i - 2x^2 + 2x + 2xi + \underbrace{x(x-1)i}_{= x^2 i - xi}$$

$$- (x-1)i + (x-1) + x - 1 - i)$$

$$P(x) = x^3 + (-1 - i - 2 + i)x^2 + (2 + 2i - i - i + 1 + 1)x$$

$$+ i - 1 - 1 - i$$

$$P(x) = x^3 + (-3)x^2 + \overbrace{4x}^{} - 2$$

Por lo tanto $\boxed{b = 4}$

(27) Obtenga el polinomio de grado 5 sobre $\mathbb{R}$ que tiene como raíces: $r_1 = 1-i$, $r_2 = 3$, $r_3 = -1$ (de multiplicidad 2), sabiendo que $P(1) = 16$.

$$P(x) = (x+1)(x-3)(x-(1+i))(x-(a+bi))$$

$$P(1) = (1+1)(1-3)(1-(1+i))(1-(a+bi)) = 16$$

$$P(1) = 2 * (-2) * (-i)(1-a-bi) = 16$$

$$P(1) = 4i\,[1-a-bi] = 16 \Rightarrow P(1) = 4i - 4ia - 4ib$$

$$P(1) = 4i - 4ia + 4b = 16 \Rightarrow P(1) = 4b + (4-4a)i = 16$$

83

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b = 16 \Rightarrow \boxed{b=4} \\ 4-4a = 0 \Rightarrow -4a = -4 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{cases}$$

Luego

$$P(x) = (x+1)(x-3)[x-(1+i)](x-(1+4i))$$

$$P(1) = (1+1)(1-3)[1-(1+i)](1-1-4i)$$

$$2 \cdot (-2) \cdot (-i) \cdot (-4i)$$

$$-4 \cdot (4i^2) = -4 \cdot -4 = 16.$$

(28) Sea $Q(z)$ un polinomio mónico de quinto grado, definido sobre el conjunto de los nros. complejos. Siendo $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ un factor de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ y $Q(1) = 8$, calcular la suma de los cuadrados de los módulos de las raíces de $Q(z)$.

1ero debemos determinar las raíces de $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$, ya que es un factor de $Q(z)$

Luego, sabemos que $Q(0) = 2$, $Q(1) = 8$ para encontrar la suma de los cuadrados de los módulos de las raíces de $Q(z)$.

Encontramos las raíces de $P(z)$

76

$P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$

$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$

	1	1	1	1
1		1	0	1
	1	0	1	$\boxed{0}$

$z^2 + 1 = 0$

$z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \boxed{z = \pm i}$

$P(x) = (x+1)(x-i)(x+i)$

Dado que $P(z)$ es un factor de $Q(z)$, podemos escribir $Q(z)$ como:

$Q(z) = P(z)Q(z)$

$Q(z) = (z+1)(z+i)(z-i)\,Q(z)$

Las raíces de $Q(z)$ son las soluciones de la ecuación $Q(z) = 0$.

$Q(z) = (z+1)(z+i)(z-i)\underbrace{(z-\alpha)(z-\beta)}_{\text{dos raíces más porq. es un polinomio de 5 raíces}}$

$Q(0) = (1)(i)(-i)(-\alpha)(-\beta) = 2$

$Q(0) = -i^2(-\alpha)(-\beta) = 2 \Rightarrow Q(0) = \alpha\beta = 2$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 2/\alpha}$

$Q(1) = (2)(2+i)(2-i)(1-\alpha)(1-\beta) = 8$

$(4+2i)(2-i)(1-\alpha)(1-\beta) = 8$

$$Q(1) = (4+2i)(2-i)(1-\alpha)(1-\beta) = 8$$

$$Q(1) = (8-4i+4i-2i^2)(1-\alpha)(1-\beta) = 8$$

$$Q(1) = (8+2)(1-\alpha)(1-\beta) = 8$$

$$Q(1) = 10(1-\alpha)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right) = 8$$

$$Q(1) = (10-10\alpha)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right) = 8$$

$$Q(1) = 10 - \frac{20}{\alpha} - 10\alpha + 20 = 8$$

$$Q(1) = 30 - \frac{20}{\alpha} - 10\alpha = 8$$

$$Q(1) = -\frac{20}{\alpha} - 10\alpha = -22 \Rightarrow$$

$$Q(1) = \frac{-20-10\alpha^2}{\alpha} = -22 \Rightarrow -20-10\alpha^2 = -22\alpha$$

$$\Rightarrow Q(1) = -10\alpha^2 + 22\alpha - 20$$

$$\frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4.(-10)(-20)}}{2.(-10)} = \frac{-22 \pm \sqrt{484 + 40(-20)}}{-20}$$

$$Q(1)=(4+2i)(2-i)(1-\alpha)(1-\beta)=8$$

$$Q(1)=(8-4i+4i-2i^2)(1-\alpha)(1-\beta)=8$$

$$Q(1)=(8+2)(1-\alpha)(1-\beta)=8$$

$$Q(1)=10(1-\alpha)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)=8$$

$$Q(1)=(10-10\alpha)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)=8$$

$$Q(1)=10-\frac{20}{\alpha}-10\alpha+20=8$$

$$Q(1)=30-\frac{20}{\alpha}-10\alpha=8$$

$$Q(1)=-\frac{20}{\alpha}-10\alpha=-22 \Rightarrow$$

$$Q(1)=\frac{-20-10\alpha^2}{\alpha}=-22 \Rightarrow -20-10\alpha^2=-22\alpha$$

$$\Rightarrow Q(1)=-10\alpha^2+22\alpha-20$$

$$\frac{-22\pm\sqrt{22^2-4.(-10)(-20)}}{2.(-10)}=\frac{-22\pm\sqrt{484+40(-20)}}{-20}$$

77

$$\frac{-22 \pm 2\sqrt{79}\,i}{20}$$

$$\alpha_s = \frac{-22}{20} \pm \frac{2\sqrt{79}\,i}{20}$$

$$\alpha_s = -\frac{11}{10} \pm 10\sqrt{79}\,i$$

$$Q(z) = (z+1)(z-i)(z+i)\left(z + \frac{11}{10} + 10\sqrt{79}\,i\right)\cdot\left(z - \frac{2}{-\frac{11}{10} - 10\sqrt{79}\,i}\right)$$

???

$$Q(z) = (z+1)(z-i)(z+i)\left(z + \frac{11}{10} - 10\sqrt{79}\,i\right)\left(z - \frac{2}{-\frac{11}{10} - 10\sqrt{79}\,i}\right)$$

29) Determine todas las raíces racionales del polinomio dado, y si es posible, halle todas sus raíces.

a) $P(x) = x^4 - 49x^2 + 8x + 56$

Posibles raíces: $q = \{\pm 1\}$

$P = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 8, \pm 14, \pm 28, \pm 56\}$

$P/q = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 8, \pm 14, \pm 28, \pm 56\}$

	1	0	-49	8	56
1		1	-1	-48	56
	1	-1	-48	56	$\boxed{0}$
7		7	-56	56	
	1	-8	8	$\boxed{0}$	

Es decir $P(-1) = 0$ y $P(-7) = 0$

Ahora tenemos: $x^2 - 8x + 8 = 0$

$$\frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4.1.8}}{2.1} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} \qquad x_1 = 4 + 2\sqrt{2} \qquad x_2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

Luego $P(x) = (x+1)(x+7)(x - (4+2\sqrt{2}))(x - (4-2\sqrt{2}))$

78

b) $P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 15x - 9$

Posibles raíces (teo. de Gauss):

$q = \{\pm 1, \pm 2\}$ $p = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

$p/q = \{\pm 1, \pm 1/2, \pm 3, \pm 3/2, \pm 9, \pm 9/2\}$

	2	-11	11	15	-9
1		2	-13	24	-9
	2	-13	24	-9	$\boxed{0}$
-3		-6	21	-9	
	2	-7	3	$\boxed{0}$	

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$$\frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.3}}{2.2}$$

$x_1 = 3$

$x_2 = 1$

Luego $P(x) = (x+1)(x-3)^2(x-1)$

c) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

Posibles raíces: $q = \{\pm 1, \pm 2\}$ $p = \{\pm 1, \pm 3\}$

$p/q = \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}\}$ $P(1) = 0$

-1	2	-1	-4	3
		-2	-1	3
	2	1	-3	$\boxed{0}$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4}$$

$$P(x) = (x-1)\left(x - \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{4}\right)\right)$$

d) $P(x) = 4x^3 + 14x^2 + 10x - 3$

Posibles raíces: $q = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, $p = \{\pm 1, \pm 3\}$

$$p/q = \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}\right\}$$

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$\frac{3}{2}$	4	14	10	-3
		6	12	-3
	4	8	-2	$\boxed{0}$

$$4x^2 + 8x - 2 = 0$$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.4.-2}}{2.4} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{2}}{8}$$

-1	2	-1	-4	3
		-2	-1	3
	2	1	-3	$\boxed{0}$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4}$$

$$P(x) = (x-1)\left(x - \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{4}\right)\right)$$

d) $P(x) = 4x^3 + 14x^2 + 10x - 3$

Posibles raíces: $q = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, $p = \{\pm 1, \pm 3\}$

$$p/q = \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}\right\}$$

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$\frac{3}{2}$	4	14	10	-3
		6	12	-3
	4	8	-2	$\boxed{0}$

$$4x^2 + 8x - 2 = 0$$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.4.-2}}{2.4} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{2}}{8}$$

79

$$\boxed{X_1 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$\boxed{X_2 = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$P(X) = \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \left[-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]\right)\left(x - \left[-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right]\right)$$

ⓔ $P(X) = 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 7x - 6$

Posibles raíces: $q = \{\pm 1, \pm 2\}$ $p = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ $\frac{p}{q} = \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 6\right\}$

	2	7	4	-7	-6
1		2	5	-1	-6
	2	5	-1	-6	$\boxed{0}$
2		4	2	-6	
	2	1	-3	$\boxed{0}$	

$2x^2 + x - 3 = 0$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{4}$$

$$X_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} \qquad X_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$P(x) = (x+1)(x+2)\left(x - \left[-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}\right]\right)\left(x - \left[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}\right]\right)$$

MCD

f) $P(x) = x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 34x^2 - 45x - 18$

Posibles raíces: $q = \{\pm 1\}$; $P = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

$P/q = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

	1	4	-4	-34	-45	-18
1		1	3	-7	-27	-18
	1	3	-7	-27	-18	$\boxed{0}$
1		1	2	-9	-18	
	1	2	-9	-18	$\boxed{0}$	
2		2	0	-18		
	1	0	-9	$\boxed{0}$		

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$

$\Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$

$P(x) = (x+1)^2(x+2)(x-3)(x+3)$

$$P(x) = (x+1)(x+2)\left(x - \left[-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}\right]\right)\left(x - \left[-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}\right]\right)$$

MCD

5

1) $P(x) = x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 34x^2 - 45x - 18$

Posibles raíces: $q = \{\pm 1\}$; $p = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

$p/q = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

	1	4	-4	-34	-45	-18
1		1	3	-7	-27	-18
	1	3	-7	-27	-18	$\boxed{0}$
1		1	2	-9	-18	
	1	2	-9	-18	$\boxed{0}$	
2		2	0	-18		
	1	0	-9	$\boxed{0}$		

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$

$\Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$

$P(x) = (x+1)^2(x+2)(x-3)(x+3)$

30) Halle el máximo común divisor entre los polinomios dados: 80

Hay q. factorizar ambos y tomar el común de menor potencia. (Pág. 63-64)

$P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \qquad P/q = \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$

	2	2	-3	-2	1
-1		-2	-4	-1	1
	2	4	1	-1	$\boxed{0}$
1		2	2	-1	
	2	2	-1	$\boxed{0}$	

$2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.2(-1)}}{4}$

$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} \qquad x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$P(x) = (x-1)(x+1)\left(x - \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left[-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right]\right)$

$Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \qquad Q(x) = (x+1)\left(x - \left[-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right]\right)\left(x - \left[\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right]\right)$

	1	2	2	1
1		1	1	1
	1	1	1	$\boxed{0}$

$\boxed{MCD = x+1}$

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.1.1}}{2} =$

$x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} \qquad x_2 = (-1 - \sqrt{3}i)/2$

b) $P(x) = 3x^4 - x^2 - 2$

Tomamos $W = x^2 \Rightarrow 3w^2 - W - 2 = 0$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.3.(-2)}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6}$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

$3.1^4 - 1^2 - 2 = 3 - 1 - 2 = 0 = P(1)$

$P\left(\sqrt{-\frac{2}{3}}\right) = 3\left(\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^4 - \left(\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)^2 - 2$

$P\left(\sqrt{\frac{2}{3}}i\right) \qquad 3.\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) - 2$

$3.\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{2}{3} - 2 = 0$

$i^2 = -1 \Rightarrow \sqrt{-\frac{2}{3}}\sqrt{-\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}i.\sqrt{\frac{2}{3}}i$

$i = \sqrt{-1}$

$= \sqrt{\frac{2.2}{3.3}}\, i^2 = -\frac{2}{3}$

$3\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{2}{3} - 2 = \frac{12 + 6 - 18}{9} = \frac{0}{9} = 0$

$\frac{x}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}.9 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$

Falta un 3 que multiplique todo 81

$$P(x) = (x+1)(x-1)\overset{\circledast}{\left(x-\sqrt{\frac{2}{3}}i\right)\left(x+\sqrt{\frac{2}{3}}i\right)}$$

$$P(x) = (x-1)(x+1)(3x^2+2) = 0$$

$Q(x) = 3x^2+2$ $\qquad$ $Q(x) = (x-4i)(x+4i)$

$$\frac{-0 \pm \sqrt{-4.3.2}}{2.3} = \frac{\sqrt{-24}}{6} = \pm 4i$$

$$\boxed{MCD = 3x^2+2}$$

$$\circledast \quad 3\left(x-\sqrt{\frac{2}{3}}i\right)\left(x+\sqrt{\frac{2}{3}}i\right) = 3\left[x^2-\sqrt{\frac{2}{3}}i\sqrt{\frac{2}{3}}i\right]$$

$$= 3\left[x^2+\frac{2}{3}\right] = 3x^2+2$$

ⓒ $P(x) = x^3+x^2-4x-4$

	1	1	-4	-4
1		1	0	-4
	1	0	-4	$\boxed{0}$

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2}$$

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x+2)$$

$Q(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

$Q(x) = x(x+2)(x-2)$

$S(x) = 2x^4 - 6x^2 - 8$

$q = \{\pm 1, \pm 2\}$; $p = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

Tomamos $w = x^2 \Rightarrow 2w^2 - 6w - 8 = 0$

$\dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4.2.(-8)}}{2.2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{100}}{4}$ $\quad x_1 = 4$, $x_2 = -1$

$S(\pm 2) = 0 \qquad S(\pm i) = 0$

$S(x) = (x-2)(x+2)2(x-i)(x+i)$

$MCD = (x-2)(x+2)$

(d) $P(x) = x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9)$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$

$P(x) = x^2(x+3)(x-3)$

$Q(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6)$

82

$$\frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2} \qquad X_1 = 3$$

$$X_2 = 2$$

$$Q(x) = x^2(x-3)(x-2)$$

$$S(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2(x^2 - 6x + 9)$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.9}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$S(x) = x^2 (x-3)^2$$

$$MCD = x^2 (x-3)$$

T.P. N°4: Fracciones Racionales

① La fracción irreducible de

$$\frac{x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^{10} + x^8 + x^6}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\frac{x^{10} + x^8 + x^6}{x^4 + x^2 + 1} + 1 = \frac{x^6 \cancel{(x^4 + x^2 + 1)}}{\cancel{x^4 + x^2 + 1}} + 1 = x^6 + 1$$

② Operar y simplificar

$$\left(\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}\right)\cdot\frac{(x-3)^2+12x}{2}$$

Buscamos MCD para sumar:

$$\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.1.2}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}$$

$x_1=-2 \quad x_2=-1 \qquad (x+2)(x+1)=x^2+3x+2$

$$\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.1.3}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2}$$

$x=\frac{-4\pm2}{2} \qquad x_1=\frac{-6}{2} \qquad x_2=\frac{-2}{2}$

$x_1=-3 \qquad x_2=-1$

$x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

$$\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.1.6}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}$$

$x_1=-\frac{6}{2}=-3 \qquad x_2=\frac{-4}{2}=-2 \qquad (x+3)(x+2)$

MCD = 1

$$\frac{1+2x+1}{(x+2)(x+1)(x+3)(x+1)(x+3)(x+2)}=\frac{2(\cancel{x+1})}{(x+2)^2(\cancel{x+1})^2(x+3)^2}$$

$$=\left(\frac{\cancel{2}}{(x+2)^2(x+1)(x+3)^2}\right)\cdot\frac{(x-3)^2+12x}{\cancel{2}}$$

② Operar y simplificar

$$\left(\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}\right)\cdot\frac{(x-3)^2+12x}{2}$$

Buscamos MCD para sumar:

$$\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.1.2}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}$$

$x_1=-2 \quad x_2=-1 \qquad (x+2)(x+1)=x^2+3x+2$

$$\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.1.3}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2}$$

$$x=\frac{-4\pm2}{2} \qquad x_1=\frac{-6}{2} \qquad x_2=\frac{-2}{2}$$

$$x_1=-3 \qquad x_2=-1$$

$x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

$$\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.1.6}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{-5\pm1}{2}$$

$x_1=-\frac{6}{2}=-3 \qquad x_2=-\frac{4}{2}=-2 \qquad (x+3)(x+2)$

MCD = 1

$$\frac{1+2x+1}{(x+2)(x+1)(x+3)(x+1)(x+3)(x+2)}=\frac{2(x+1)}{(x+2)^2(x+1)^2(x+3)^2}$$

$$=\left(\frac{2}{(x+2)^2(x+1)(x+3)^2}\right)\cdot\frac{(x-3)^2+12x}{2}$$

$$= \frac{(x-3)^2 + 12x}{(x+2)^2\,(x+1)\,(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 9}{(x+2)^2\,(x+1)\,(x+3)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(x+3)^2}}{(x+2)^2\,(x+1)\,\cancel{(x+3)^2}} = \frac{1}{(x+2)^2 * (x+1)}$$

③ Obtener la fracción irreducible de las siguientes operaciones:

ⓐ $$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{(x-1)-x}{x-1}} =$$

$$1 - \frac{x-1}{(x-1)-x} = \frac{(x-1)-x-(x-1)}{(x-1)-x} =$$

$$\frac{x-1-x-x+1}{x-1-x} = \frac{-x}{-1} = \boxed{x}$$

6. El producto de dos ...

MCM entr

E8 (b)

$$\frac{x-1-\frac{12}{x-2}}{x+6+\frac{16}{x-2}} = \frac{\frac{x(x-2)-(x-2)-12}{x-2}}{\frac{x(x-2)+6(x-2)+16}{x-2}}$$

$$= \frac{\frac{x^2-2x-x+2-12}{x-2}}{\frac{x^2-2x+6x-12+16}{x-2}} = \frac{\frac{x^2-3x-10}{x-2}}{\frac{x^2+4x+4}{x-2}} =$$

$$\frac{3\pm\sqrt{3^2-4.1(-10)}}{2.1} = \frac{3\pm 7}{2}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{10}{2} = 5 \qquad x_2 = \frac{-4}{2} = -2}$$

$$\frac{\frac{(x-5)(x+2)}{x-2}}{\frac{(x+2)(x+2)}{x-2}}$$

$$\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.1.4}}{2} = -2$$

$$\frac{(x-5)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x+2)}(x+2)} = \frac{x-5}{x+2}$$

(c)

$$\frac{\frac{a}{a+y}+\frac{y}{a-y}}{\frac{y}{a+y}-\frac{a}{a-y}} = \frac{\frac{a+y}{(a+y)(a-y)}}{\frac{y-a}{(a+y)*(a+y)}}$$

$$\frac{a+y}{\cancel{(a+y)(a-y)}} \cdot \frac{\cancel{(a+y)(a-y)}}{y-a} = \frac{a+y}{y-a}$$

6. El producto de dos ...

MCM entre

8 (b)

$$\frac{X-1-\frac{12}{X-2}}{X+6+\frac{16}{X-2}} = \frac{\frac{X(X-2)-(X-2)-12}{X-2}}{\frac{X(X-2)+6(X-2)+16}{X-2}}$$

$$= \frac{\frac{X^2-2X-X+2-12}{X-2}}{\frac{X^2-2X+6X-12+16}{X-2}} = \frac{\frac{X^2-3X-10}{X-2}}{\frac{X^2+4X+4}{X-2}} =$$

$$\frac{3\pm\sqrt{3^2-4.1(-10)}}{2.1} = \frac{3\pm 7}{2}$$

$$\boxed{X_1 = \frac{10}{2} = 5 \qquad X_2 = -\frac{4}{2} = -2}$$

$$\frac{\frac{(X-5)(X+2)}{X-2}}{\frac{(X+2)(X+2)}{X-2}}$$

$$\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.1.4}}{2} = -2$$

$$\frac{(X-5)\cancel{(X+2)}}{\cancel{X-2}} \cdot \frac{\cancel{X-2}}{\cancel{(X+2)}(X+2)} = \frac{X-5}{X+2}$$

(c)

$$\frac{\frac{a}{a+y}+\frac{y}{a-y}}{\frac{y}{a+y}-\frac{a}{a-y}} = \frac{\frac{a+y}{(a+y)(a-y)}}{\frac{y-a}{(a+y)*(a+y)}}$$

$$\frac{a+y}{\cancel{(a+y)(a-y)}} \cdot \frac{\cancel{(a+y)(a-y)}}{y-a} = \frac{a+y}{y-a}$$

4) Simplificar las sig. expresio- 84
-nes:

ⓐ $$\frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-(x^2+7x+11)^2}{(x+2)(x+4)(x+5)(x+7)-(x^2+9x+17)^2}$$

Notamos que:

$(x+2)(x+5) = x^2+7x+10 = x^2+7x+11-1$

$(x+3)(x+4) = x^2+7x+12 = x^2+7x+11+1$

$\Rightarrow (x+2)(x+5)(x+3)(x+4) = (x^2+7x+11-1)(x^2+7x+11+1)$
$= (x^2+7x+11)^2-1$

Lo mismo con el denominador:

$(x+2)(x+7) = x^2+9x+14 = x^2+7x+17-3$

$(x+4)(x+5) = x^2+9x+20 = x^2+7x+17+3$

$\Rightarrow (x+2)(x+7)(x+4)(x+5) = (x^2+9x+17-3)(x^2+9x+17$
$+3) = (x^2+9x+17)^2-9$

Por lo tanto

$$\frac{(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)-(x^2+7x+11)^2}{(x+2)(x+7)(x+4)(x+5)-(x^2+9x+17)^2} = \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9}$$

4) Simplificar las sig. expresio- 84
-nes:

ⓐ $$\frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-(x^2+7x+11)^2}{(x+2)(x+4)(x+5)(x+7)-(x^2+9x+17)^2}$$

Notamos que:

$(x+2)(x+5) = x^2+7x+10 = x^2+7x+11-1$

$(x+3)(x+4) = x^2+7x+12 = x^2+7x+11+1$

$\Rightarrow (x+2)(x+5)(x+3)(x+4) = (x^2+7x+11-1)(x^2+7x+11+1)$
$= (x^2+7x+11)^2-1$

Lo mismo con el denominador:

$(x+2)(x+7) = x^2+9x+14 = x^2+7x+17-3$

$(x+4)(x+5) = x^2+9x+20 = x^2+7x+17+3$

$\Rightarrow (x+2)(x+7)(x+4)(x+5) = (x^2+9x+17-3)(x^2+9x+17$
$+3) = (x^2+9x+17)^2-9$

Por lo tanto

$$\frac{(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)-(x^2+7x+11)^2}{(x+2)(x+7)(x+4)(x+5)-(x^2+9x+17)^2} = \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9}$$

6. El producto de

8

(b) $$\frac{x}{ax-2a^2} - \frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right)$$

$$\frac{x}{ax-2a^2} - \frac{2}{x^2+x-2ax-2a} + \frac{6x+2x^2}{3x^2+3x-6ax-6a+x^3+x^2-2ax^2-2ax}$$

$$\frac{x}{ax-2a^2} - \frac{2}{x^2+(1-2a)x-2a} + \frac{6x+x^2}{x^3+(1+3-2a)x^2-(-6a+3-2a)x-6a}$$

$$\frac{x}{ax-2a^2} - \frac{2}{x^2+(1-2a)x-2a} + \frac{6x+x^2}{x^3+(4-2a)x^2-(3-8a)x-6a}$$

⑤ Hallar el valor de "α" de modo que la expresión $x-\alpha+\frac{1}{x+1}$ sea equiva-lente a $\frac{x^2}{x+1}$

$$x-\alpha+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1} \Rightarrow x-\alpha+\frac{1}{x+1}-\frac{x^2}{x+1}=0.$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)(x+1)+1-x^2}{x+1}=0 \Rightarrow x^2+x-\alpha x-\alpha+1+x^2=0.$$

$$\Rightarrow 2x^2+\overbrace{(1-\alpha)}^{=0}x\ \overbrace{-\alpha+1}^{=0}=0$$

$$\begin{cases} 1-\alpha=0 \Rightarrow 1-\alpha=0, \Rightarrow \boxed{1=\alpha} \\ -\alpha+1=0 \Rightarrow -1+1=0 \checkmark \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha=1}$$

38

⑥ El producto de dos polinomios es $(x^6+1)^2-4x^6$ y el cociente del MCM entre el MCD de ambos es $(x^2+1)^2-4x^2$. Calcular el MCD

MCM = Mínimo Común Múltiplo

MCD = Máximo común Divisor

$$\frac{MCM}{MCD} = (x^2+1)^2-4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MCM = \left((x^2+1)^2-4x^2\right) * MCD$$

Sabemos que $\boxed{MCM(p,q) * MCD(p,q) = p(x)q(x)}$

Reemplazamos:

$$\left[\left((x^2+1)^2-4x^2\right) * MCD\right] * MCD = (x^6+1)^2-4x^6$$

$$\left[(x^2+1)^2-4x^2\right] * MCD^2 = (x^6+1)^2-4x^6$$

$$MCD^2 = \frac{(x^6+1)^2-4x^6}{(x^2+1)^2-4x^2}$$

$$MCD^2 = \frac{(x^6-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$MCD = \sqrt{\frac{(x^6-1)^2}{(x^2-1)^2}}$$

$$MCD = \frac{\sqrt{(x^6-1)^2}}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \Rightarrow$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$MCD = \frac{x^6-1}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^4+x^2+1 \\ \hline x^2-1 & x^6-1 \\ & -x^6-x^4 \\ \hline & -1+x^4 \\ & -x^4-x^2 \\ \hline & -1+x^2 \\ & -x^2-1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$MCD = x^4+x^2+1$$

⑦ Determine el polinomio que debe colocarse en los puntos suspensivos para obtener un enunciado verdadero. Explique como determinó su respuesta:

ⓐ $$\frac{x^2-x-12}{x^2+2x-3} \cdot \frac{\ldots}{x^2-2x+9} = 1$$

$$x^2-x-12 = (x-4)(x+3)$$

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

$$x^2-2x+9 =$$

$$(x-(1+2i\sqrt{2}))(x-(1+2i\sqrt{2}$$

$$2x+2 \quad \boxed{x=-1}$$

38 a) $\dfrac{(x-4)\cancel{(x+3)}}{(x-1)\cancel{(x+3)}} \cdot \dfrac{\dots}{(x-2)x+9}$

$\dfrac{(x-4)}{(x-1)} \cdot \dfrac{\dots}{(x-2)x+9} = \dfrac{}{(x-1)(x-2)x+9(x-1)}$

$= \dfrac{(x-4)[\dots]}{x^3-3x+11x-9} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-4)(\dots)}{(x-1)(x-[1-2i\sqrt{2}])(x-[1+2i\sqrt{2}])}$

$\dfrac{(x-4)[(x-1)(x-[1-2i\sqrt{2}])(x-[1+2i\sqrt{2}])\left(\frac{1}{x-4}\right)}{(x-1)(x-[1-2i\sqrt{2}])(x-(1+2i\sqrt{2}])}$

$\dots = \dfrac{(x-1)[(x-2)x+9]}{x-4}$ es el polinomio deseado.

b) $\dfrac{x^2-9}{2x^2+3x-2} : \dfrac{2x^2-9x+9}{\dots} = \dfrac{x+3}{2x-1}$

$\dfrac{x^2-9}{2x^2+3x-2} \cdot \dfrac{\dots}{2x^2-9x+9} = \dfrac{x+3}{2x-1}$

$\dfrac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+2)}\left(x+\frac{1}{2}\right)} \cdot \dfrac{\cancel{(x+2)}}{(x-3)^2 \cdot 2\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{x+3}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ = polinomio buscado

6. El producto de d...

87

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+2)}{(x-3)^2 \cdot 2\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \boxed{\frac{x+3}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}}$$

$\therefore \dfrac{(x+2)}{(x-3)^2 * 2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$ es el polinomio buscado

c) $$\frac{x^2-4}{(x+2)^2} \cdot \frac{2x^2+x-6}{\ldots} = \frac{x-2}{2x+5}$$

$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} \cdot \frac{(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)(2x+5)} = \frac{x-2}{2x+5}$$

polinomio buscado

$$\frac{(x-2)}{1} \cdot \frac{1}{2x+5} = \frac{x-2}{2x+5}$$

d) $$\frac{4a^2-a-18}{\ldots} : \frac{4a^3-9a^2}{6a^2-9a+3} = \frac{3(a-1)}{a^2}$$

$$\frac{(a+2)(a-9/4)}{\ldots} \cdot \frac{6(a-1)\left(a-\frac{1}{2}\right)}{a^2(4a-9)} = \frac{3(a-1)}{a^2}$$

$$\frac{(a+2)(a-9/4)}{2\left(a-\frac{1}{2}\right)(a+2)(a-9/4)} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}(a-1)(a-1/2)}{a^2(4a-9)} = \frac{3(a-1)}{a^2}$$

polinomio deseado

6. El producto de dos polinomios es

CM entre MCD

y luego

x6+1)2−4x6

ducto de

nte del

F8

(8) Descomponer en fracciones simples sobre $\mathbb{R}$ las sig. fracciones racionales:

(a) $$\frac{2x^3-3x+7}{x(x-3)(x-4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x-4}$$

Buscamos valores de a, b y c:

$$\frac{a(x-3)(x-4)+bx(x-4)+cx(x-3)}{x(x-3)(x-4)} = \frac{2x^3-3x+7}{x(x-3)(x-4)}$$

simplificando:

$$a(x-3)(x-4)+bx(x-4)+cx(x-3) = 2x^3-3x+7$$

Asignamos valores a x:

sea $x=0 \Rightarrow 12a = 7 \Rightarrow \boxed{a = \frac{7}{12}}$

sea $x=3 \Rightarrow a\cancel{(3-3)}(3-4)+b(+3)(3-4)+c\cancel{(+3)(3-3)}$

$= 2(+3)^3 - 3.3+7 \Rightarrow -3b = 52 \Rightarrow \boxed{b = \frac{52}{-3}}$

sea $x=4 \Rightarrow c(4)(4-3) = 2(4)^3-3(4)+7$

$\Rightarrow 4c = 123 \Rightarrow c = \frac{123}{4}$

$$\therefore \frac{2x^3-3x+7}{x(x-3)(x-4)} = \frac{7/12}{x} + \frac{-52/3}{x-3} + \frac{123/4}{x-4}$$

Ejemplo:

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

Necesitamos encontrar a y b

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+3)} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

Simplificando:

$x+3 = a(x+2)+b(x+1)$

Asignamos valores a x para obtener un sist. de ec y calcular valores a y b.

$x = -2$

$-2+3 = a(-2+2)+b(-2+1)$

$\boxed{b = -1}$

Para el caso de a observamos que $x=-1$ nos facilita el proceso

$x = -1$

$-1+3 = a(-1+2)+b(-1+1)$

$\boxed{2 = a}$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}0329 \\ 91\,\overline{)\,3000} \\ -273 \\ \hline 0270 \\ -182 \\ \hline 0880 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16{,}6 \\ 3\,\overline{)\,50} \\ -3 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \end{array}$$

Ejemplo:

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

Necesitamos encontrar a y b

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+3)} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

Simplificando:

$x+3 = a(x+2)+b(x+1)$

Asignamos valores a x para obtener un sist. de ec y calcular valores a y b.

$x = -2$

$-2+3 = a(-2+2)+b(-2+1)$

$\boxed{b = -1}$

Para el caso de a observamos que $x=-1$ nos facilita el proceso

$x = -1$

$-1+3 = a(-1+2)+b(-1+1)$

$\boxed{2 = a}$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}0329 \\ 91 \overline{)\,3000} \\ -273 \\ \hline 0270 \\ -182 \\ \hline 0880 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16{,}6 \\ 3 \overline{)\,50} \\ -3 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \end{array}$$

88 Siendo el resultado

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{x+2}$$

Ejemplo 2

Sea $\dfrac{x^2+3x+1}{(x+1)^3}$

Se puede descomponer de esta manera:

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3}$$

Mult. por $(x+1)^3$, tenemos:

$$\frac{(x^2+3x+1)(x+1)^3}{(x+1)^3} = \frac{a(x+1)^3}{x+1} + \frac{b(x+1)^3}{(x+1)^2} + \frac{c(x+1)^3}{(x+1)^3}$$

Simplificando: $x^2+3x+1 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

- Podemos asignar valores a x, para formar:

Sea $x = 0$

$1 = a + b + c$

Sea $x = 1$

$5 = 4a + 2b + c$

Sea $x = -1$

$-1 = 0 + 0 + c$

6. El producto de dos polinomios es (x^6+1)^2 - 4x^6 y el ...
de ambos es (x^2+1)^2 -4x^2. Calcular el ...

Respuesta

89

$$\frac{x^2+3x+1}{(x+1)^3} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^3}$$

(b) $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{-(x+1)(x-1)} = \frac{a}{-(x+1)} + \frac{b}{x-1}$$

Buscamos valores de a y b.

$$\frac{a(x-1) - b(x+1)}{-(x+1)(x-1)} = \frac{1}{-(x+1)(x-1)}$$

Simplificando

$$a(x-1) - b(x+1) = 1$$

Asignamos valores a x.

Sea $x = 1 \Rightarrow -b(1+1) = 1 \Rightarrow -2b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{2}}$

Sea $x = -1 \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{1}{-(x+1)(x-1)} = \frac{-1/2}{-(x+1)} + \frac{-1/2}{x-1}$$

P8 ⓒ $\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4.-5}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = -5$$

$$\frac{x}{(x-1)(x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+5}$$

Buscamos valores de a y b.

$$\frac{x}{(x-1)(x+5)} = \frac{a(x+5)+b(x+1)}{(x-1)(x+5)} \Rightarrow$$

$$x = a(x+5) + b(x+1)$$

Podemos asignar valores a x.

sea $x = 0 \Rightarrow 0 = 5a + b \Rightarrow$ ⊛

Sea $x = -5 \Rightarrow -5 = -4b \Rightarrow \boxed{b = \frac{5}{4}}$

⊛ $0 = 5a + \frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} = 5a \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{4} = a}$

$$\therefore \frac{x}{x^2+4x-5} = \frac{-1/4}{x-1} + \frac{5/4}{x+5}$$

6. El producto de d...
de a...

Re...
P...

90

ⓓ $\dfrac{x^2}{x^2+x-6}$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4.(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2}$$

$$\frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = \frac{a(x-2)+b(x+3)}{(x+3)(x-2)} \Rightarrow x^2 = a(x-2)+b(x+3)$$

Podemos asignar valores a x.

Sea $x=2 \Rightarrow 2^2 = 5b \Rightarrow \boxed{b = \frac{4}{5}}$

Sea $x=-3 \Rightarrow (-3)^2 = -5a \Rightarrow \boxed{-\frac{9}{5} = a}$

$$\therefore \frac{x^2}{x^2+x-6} = \frac{-9/5}{x+3} + \frac{4/5}{x-2}$$

ⓔ $$\frac{x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4}{(x^2+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x^2+1} + \frac{b}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^4\,(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{a(x^2+1)^2}{x^2+1} + \frac{b\cancel{(x^2+1)^2}}{\cancel{(x^2+1)^2}}$$

$x^4 = a(x^2+1) + b \Rightarrow$ Sea $x = 0$

Sea $x = 1 \Rightarrow 1 = -2b + b \Rightarrow \boxed{b = -1} \Rightarrow 0 = a + b \Rightarrow \boxed{a = -b}$

6. El producto de d...
de a...

Re...
P...

90

(d) $$\frac{x^2}{x^2+x-6}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4.(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2}$$

$$\frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = \frac{a(x-2)+b(x+3)}{(x+3)(x-2)} \Rightarrow x^2 = a(x-2)+b(x+3)$$

Podemos asignar valores a x.

Sea $x=2 \Rightarrow 2^2 = 5b \Rightarrow \boxed{b = \frac{4}{5}}$

Sea $x=-3 \Rightarrow (-3)^2 = -5a \Rightarrow \boxed{-\frac{9}{5} = a}$

$$\therefore \frac{x^2}{x^2+x-6} = \frac{-9/5}{x+3} + \frac{4/5}{x-2}$$

(e) $$\frac{x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4}{(x^2+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x^2+1} + \frac{b}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^4 (x^2+1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{a(x^2+1)^2}{x^2+1} + \frac{b\cancel{(x^2+1)^2}}{\cancel{(x^2+1)^2}}$$

$x^4 = a(x^2+1) + b \Rightarrow$ Sea $x = 0$

Sea $x = 1 \Rightarrow 1 = -2b + b \Rightarrow \boxed{b = -1} \Rightarrow 0 = a + b \Rightarrow \boxed{a = -b}$

00. $\dfrac{x^4}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{-1}{(x^2+1)^2}$

No entendí

f) $\dfrac{x^2+2x+3}{x^3(x-1)(x+3)} = \dfrac{a}{x^3} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+3}$

$$\frac{a(x-1)(x+3)+bx^3(x+3)+c(x-1)x^3}{x^3(x-1)(x+3)} = \frac{x^2+2x+3}{x^3(x-1)(x+3)}$$

$$a(x-1)(x+3)+bx^3(x+3)+c(x-1)x^3 = x^2+2x+3$$

Sea $x=1 \Rightarrow b.1^3(4) = 1^2+2.1+3 \Rightarrow 4b = 6$

$\Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$

Sea $x=-3 \Rightarrow c(-3-1)(-3)^3 = (-3)^2+2(-3)+3$

$\Rightarrow 108c = 6 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{18}}$

Sea $x=0 \Rightarrow -3a = 3 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$$\therefore \frac{x^2+2x+3}{x^3(x-1)(x+3)} = \frac{-1}{x^3} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{1/18}{x+3}$$

El producto de dos polinomios es (x^6+1)^2 - 4x^6 y el cociente del MCM entre MCD de ambos es (x^2+1)^2 -4x^2. Calcular el MCD.

Respuesta

Para calcular el ...

9) Si $\dfrac{3x^3+12x^2+15x-2}{x^3+5x^2+9x+5} = \dfrac{Ax-1}{x+1} + \dfrac{x+B}{x^2+4x+5}$, hallar $A+B$.

$q=\{\pm 1\}$ $p=\{\pm 1, \pm 5\}$

	1	5	9	5
1		1	4	5
	1	4	5	$\boxed{0}$

$x^2+4x+5=0$

$$\frac{3x^3+12x^2+15x-2}{x^3+5x^2+9x+5} = \frac{(Ax-1)(x^2+4x+5)+(x+B)(x+1)}{(x+1)(x^2+4x+5)}$$

$\Rightarrow 3x^3+12x^2+15x-2 = (Ax-1)(x^2+4x+5)+(x+B)(x+1)$

Sea $x=0 \Rightarrow -2=(-1)(5)+(B)(1)$

$\Rightarrow -2=-5+B \Rightarrow \boxed{B=3}$

Sea $x=-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (A(-3)-1)((-3)^2+4(-3)+5)+\overbrace{((-3)+3)}^{=0}((-3)+1)$

$\Rightarrow 3A.(9-12+5)=-20 \Rightarrow 3A.2=-20$

$\Rightarrow 6A=-20 \Rightarrow \boxed{A=-\frac{10}{3}}$

de ambos es (x^2+1)^2 -4x^2. Calcular el MCD.

Respuesta

Para calcular el máximo común divisor (MCD) de d...

encontrar los factores comunes entre ...

y el cociente del MCM ...

...s factorizarlos y luego

...olinomios es (x6+1)2

...ctorizar el producto

...rizar el cociente

factores

$= p(x)q$

$\frac{}{}/(x+$

bem

do

P (10) La fracción $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$ se obtuvo sumando las fracciones $\frac{A}{x+2}$ y $\frac{B}{2x-3}$. Obtener las expresiones para A y B.

$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-3} = \frac{A(2x-3)+B(x+2)}{(x+2)(2x-3)}$$

$$5x-11 = A(2x-3)+B(x+2)$$

sea $x=-2$

$\Rightarrow 5(-2)-11 = A(2(-2)-3) \Rightarrow 110A = 12 \Rightarrow$

$\boxed{A = 6/55}$

sea $x = \frac{3}{2} \Rightarrow 5\left(\frac{3}{2}\right)-11 = A\overbrace{\left(\cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right)-3\right)}^{=0} +$

$+B\left(\left(\frac{3}{2}\right)+2\right) \Rightarrow -\frac{7}{2} = \frac{7}{2}B \Rightarrow \boxed{B=-1}$

(11) Calcular los valores de A y B para que se verifique la sig. equivalencia:

$$\frac{3x^3+12x^2+15x-2}{x^3+5x^2+9x} = \frac{Ax-1}{x+1} + \frac{x+B}{x^2+4x+5}$$

$$\frac{3x^3+12x^2+15x-2}{x^3+5x^2+9x} = \frac{(Ax-1)(x^2+4x+5)+(x+B)(x+1)}{(x+1)(x^2+4x+5)}$$

6. El producto de dos polinomios es (x^6+1)^2
de ambos es (x^2+1)^2

$3x^3+12x^2+15x-2=(Ax-1)(x^2+4x+5)$ 92

$+(x+B)(x+1)$

Sea $x=0 \Rightarrow -2=(-1)(5)+B(1)$

$\Rightarrow -2=-5+B \Rightarrow \boxed{3=B}$

Sea $x=-3$

$\Rightarrow 3(-3)^3+12(-3)^2+15(-3)-2=(A(-3)-1)[(-3)^2+4(-3)+5]$

$+(-3+3)(-3+1)$

$\Rightarrow -20=(-3A-1)(2) \Rightarrow -10=-3A-1 \Rightarrow$

$-9=-3A \Rightarrow \boxed{A=3}$

(12) Sabiendo que

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}=\frac{5x^2-3}{(x^2-1)(x+2)}$$

Es lo mismo q. los demás.